Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Dispersione cromatica e non linearità in fibra ottica, un'analisi simulativa

Laureando:
Francesco Lorenzi

Relatore:
Professor
Marco Santagiustina

Anno accademico 2019/2020
Data di laurea 14 Luglio 2020

Al mio professore di matematica D. Merlin,
che mi fece notare, con un anticipo di tre anni,
che molto spesso le cose più interessanti
sono descritte da leggi non lineari.

A tutti coloro che,
direttamente o indirettamente,
hanno permesso questo periodo di formazione.

Sommario

Questa tesi si propone di studiare, con l'aiuto di una simulazione numerica appositamente costruita, alcuni aspetti legati ai fenomeni di dispersione cromatica e di non linearità nella propagazione di impulsi all'interno di una fibra ottica monomodale.
Dopo un'introduzione motivazionale in cui questi fenomeni vengono descritti, si procederà all'analisi dell'equazione che regola la propagazione di impulsi, limitandosi al caso, non generale ma di rilevanza pratica, di impulsi in fibra monomodale in silice. Verrà poi implementato un metodo numerico per risolvere questa equazione, che sarà prima testato sfruttando scenari analizzabili anche in modo analitico, e usato poi per simulare situazioni in cui emergono fenomeni peculiari della propagazione nel mezzo, come la presenza di solitoni.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questo capitolo è introdurre in forma concisa le fibre ottiche ed il loro utilizzo nelle telecomunicazioni: l'impiego di questo particolare mezzo ai fini della comunicazione offre, come è noto, alcuni importanti vantaggi rispetto ad altri mezzi, come cavi coassiali, linee a doppino e collegamenti in radiofrequenza in spazio libero.

Il suo successo sta in una varietà di fattori di merito, di cui il più notevole è la possibilità di raggiungere bit rate molto elevati, grazie al vantaggio di operare con delle portanti ottiche, a frequenze di $10^{14} \div 10^{15} Hz$, ma non è l'unico: giocano un ruolo importante anche la possibilità di amplificare il segnale tramite amplificatori direttamente realizzati in fibra, e nondimeno la sua affidabilità e il suo costo comparabile, o anche inferiore a parità di prestazioni, a quello di altri mezzi.

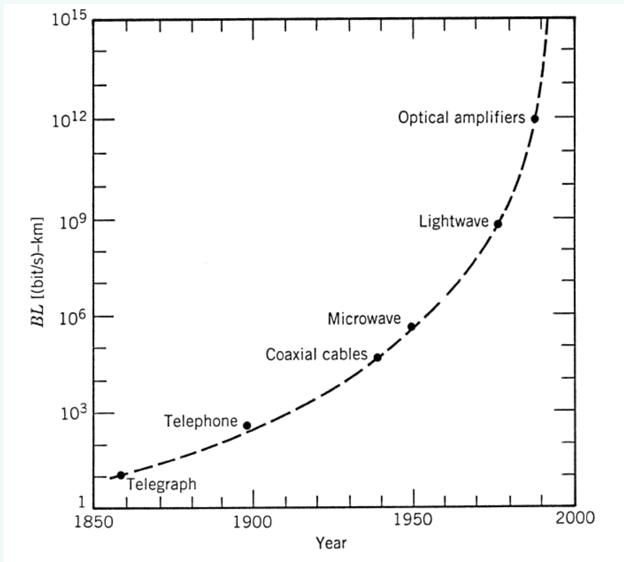

Figura 1.1: *Evoluzione temporale delle performance a distanza delle tecniche di comunicazione*

Tutti questi vantaggi sono però accompagnati da problematiche tecniche peculiari, su cui si è rivolta sempre di più l'attenzione della ricerca. In particolare è interessante il fenomeno non lineare delle fibre, che può emergere come effetto collaterale nel tentativo di alzare la potenza trasmessa nella fibra al fine di compensare l'attenuazione. A causa di questo fenomeno diventano importanti nuovi effetti, che trasformano il segnale in maniera inconsueta rispetto ad altri mezzi. La dinamica non lineare, come vedremo nei prossimi capitoli, può rappresentare al contempo sia un disturbo che una nuova opportunità di impiego del mezzo, che permette modalità di trasmissione a volte anche desiderabili.

1.1 Nota storica

Una visione completa dell'evoluzione storica delle comunicazioni ottiche richiede di esaminare tutte le componenti tecnologiche, dalla trasmissione alla propagazione ed alla ricezione, considerando anche l'avanzamento delle tecniche a livelli sempre superiori, di modulazione e demodulazione, discriminazione del segnale ricevuto, e di sintesi di reti complesse.

Concentrando la nostra attenzione solamente sul caso di una trasmissione end-to-end, ed in particolare sullo strato fisico, è possibile individuare alcuni elementi chiave che hanno abilitato, nel corso degli ultimi decenni, uno sviluppo intenso di questa tecnologia.

Partendo dalla fibra stessa, mentre i principi fisici alla base delle prime tecnologie erano conosciuti fin dal XIX secolo, i primi prototipi di fibra ottica, senza mantello (cladding), furono fabbricati negli anni '20 dello scorso secolo. Solo negli anni '50, con l'introduzione del mantello, il campo delle fibre ottiche prese vita. Le prime fibre esibivano un'attenuazione molto elevata ($> 1000dB/km$). I miglioramenti delle tecniche di fabbricazione negli anni '70 furono tali che l'attenuazione fu portata dapprima a $20dB/km$ e poi al notevole traguardo di $0.2dB/km$ nella finestra dei $1.55\mu m$, nel vicino infrarosso: si trattò dell'evento che diede il via all'enorme sviluppo di questo mezzo trasmissivo, nonché alla commercializzazione della tecnologia, a cui oggi assistiamo.

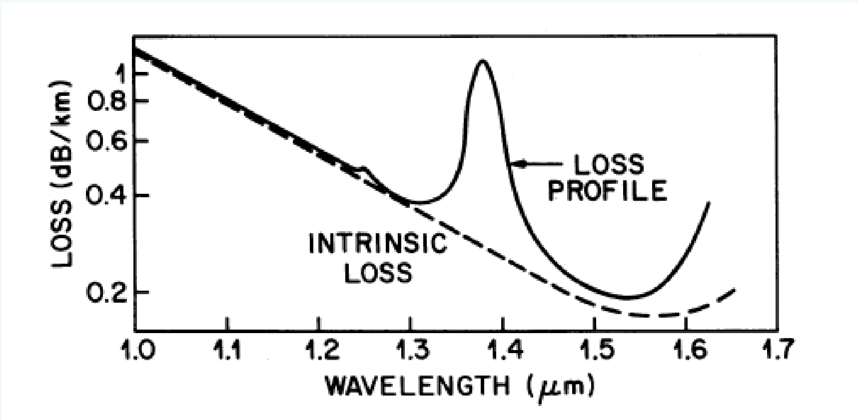

Figura 1.2: Spettro di attenuazione di una fibra monomodale in silice, confrontato con il limite dovuto allo scattering Rayleigh ed all'assorbimento nell'infrarosso (tratteggiato) [1, p.6]

Nello stesso periodo, a seguito della prima realizzazione del maser e poi del laser, inclusi i primi laser a semiconduttore, si completò lo sviluppo di tutti i dispositivi fondamentali dei sistemi di comunicazione ottici (in inglese *lightwave systems*).

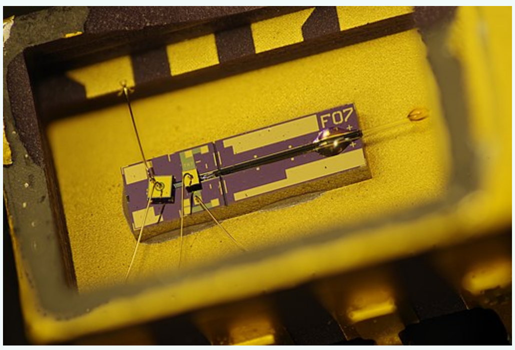

Figura 1.3: *Dettaglio dell'accoppiamento tra trasmettitore e fibra*

La disponibilità di fibre a basse perdite stimolò la ricerca sui fenomeni non lineari della propagazione, che portarono nel 1973 a prospettare la propagazione di solitoni, emergenti dalla presenza contemporanea di fenomeni dispersivi e non lineari. Questo peculiare fenomeno ebbe la prima evidenza sperimentale nel 1980. La tecnica del drogaggio con terre rare delle fibre negli anni '90 condusse infine alla realizzazione di amplificatori e laser in fibra, che si svilupparono parallelamente ad altre tecniche come l'uso di strutture periodiche nelle fibre (fiber gratings), allo scopo di costruire filtri del segnale.

L'osservazione di come la tecnica delle comunicazioni in fibra si è evoluta, dagli albori fino alle dorsali transoceaniche, rende evidente il ruolo cruciale di ogni piccolo dettaglio tecnico, e di ogni particolare proprietà di questo mezzo. Per una prospettiva storica completa dell'evoluzione delle idee e delle invenzioni relative alla fibra ottica, si consiglia J.Hecht, *City of light* [2]. Spostiamo l'attenzione su un sistema moderno, e caratterizziamo le parti di nostro interesse.

1.2 Comunicazioni in fibra ottica

1.2.1 Generalità sul mezzo

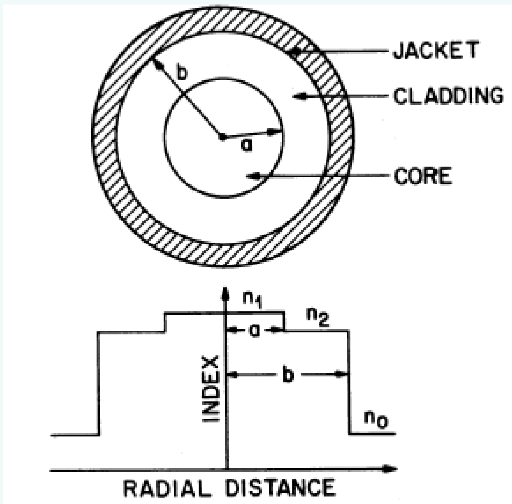

Figura 1.4: *Sezione di una fibra step-index* [1, p. 3]

Una fibra ottica si presenta come una coppia di dielettrici concentrici dalla sezione circolare, costruiti in modo tale che l'indice di rifrazione del dielettrico esterno (mantello o cladding) sia leggermente minore di quello del materiale interno (nucleo o core). Chimicamente la fibra, nella sua versione più usata, è costituita da silice (SiO_2), e per realizzare le differenze di indice di rifrazione vengono utilizzate diverse concentrazioni e diversi tipi di sostanze droganti. La propagazione ottica all'interno della fibra assume i caratteri di una propagazione guidata: dato che le caratteristiche geometriche e rifrattive della fibra influenzano la presenza di modi (si chiarirà in (2.2.2) il significato di questo termine), questo consente di suddividere le fibre in due grandi classi: le fibre monomodali e le fibre multimodali, in base appunto al numero di modi supportati.

Il fattore discriminante tra queste due tipologie di fibre è il numero V, definito come $V := k_0 a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ dove k_0 è il numero d'onda alla frequenza scelta: per $V < 2.405$ la fibra supporta un solo modo. Le analisi condotte in questo elaborato saranno incentrate proprio su questo tipo di fibra.

Come ogni altro elemento di un sistema di telecomunicazioni, anche la fibra ottica ha un impiego regolato da standard internazionali. Un ottimo riferimento per capire le soluzioni utilizzate nella pratica è lo standard G.652 di ITU [16], che riguarda le fibre monomodali. Nel documento si può osservare, oltre a specifiche più prettamente implementative, che questo tipo di fibra ha un diametro di core ($2a$) dell'ordine di grandezza della decina di μm, mentre il diametro di cladding ($2b$) è del centinaio di μm.

1.2.2 Una prospettiva sistemica

Un modello di canale di una fibra ottica generica deve essere comprensivo di tutte le caratteristiche che diventano critiche in un dato scenario di impiego. In modo astratto possiamo rappresentare un link in fibra ottica secondo questo schema

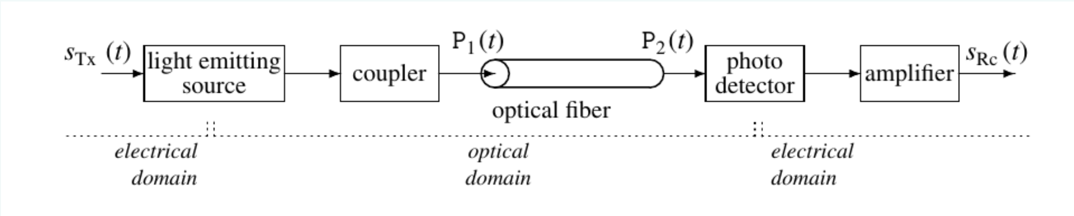

Figura 1.5: Schema a blocchi di un link in fibra ottica [3, p. 235]

infatti ci si riferisce in questo elaborato a sistemi che usano lo schema Intensity Modulation-Direct Detection (IM/DD), in cui la grandezza fisica che trasporta il segnale è la potenza ottica. La risposta in frequenza del canale per questo tipo di sistema è data da [3, p.236]:

$$G_{CH}(f) := \frac{\widehat{P}_2(f)}{\widehat{P}_1(f)} = A_F(f)^{-1} \exp\left[-2(\pi f \sigma_F)^2\right] \exp\left[-i2\pi f t_F\right] \tag{1.1}$$

dove $A_F^{-1}(f)$ è l'attenuazione (che dipende dalla lunghezza d'onda), t_F è il ritardo di propagazione, e σ_F modella la dispersione, un fenomeno che è diretta conseguenza della dipendenza dalla lunghezza d'onda dell'indice di rifrazione del mezzo e della sua geometria, che causa diversi percorsi verso il ricevitore. In seguito descriveremo la fisica di questo fenomeno; per il momento, osservando le sue implicazioni a livello di sistema, siamo in grado di dedurre dalla 1.1 che questo termine causa una convoluzione dei segnali trasmessi nel dominio del tempo per una Gaussiana, andando quindi ad allargare la loro durata. Questo può essere in grado di causare interferenza di intersimbolo (ISI) in una trasmissione numerica, degradandone la performance. Il termine di dispersione dipende fortemente dal tipo di fibra

$$\sigma_F = (D_m + D_c)\Delta\lambda L \tag{1.2}$$

è infatti proporzionale alla lunghezza del collegamento L ed alla larghezza di banda ottica di trasmissione (data da $\Delta\lambda$), tramite una costante di proporzionalità composta di

- D_m coefficiente di dispersione *intermodale*, che dipende dalla geometria della guida d'onda, ovvero dal fatto che l'energia trasmessa, spartita nei vari modi di propagazione, percorre la guida con tempi diversi a causa delle diverse costanti di fase,

- D_c coefficiente di dispersione *intramodale* o *cromatica*, che dipende dal fatto che componenti a diversa lunghezza d'onda, propagantisi nello stesso modo, hanno diverse costanti di fase.

In una fibra monomodale, come quella di nostro interesse, l'unico termine rilevante è quello di dispersione cromatica. L'ordine di grandezza della dispersione cromatica è, prendendo come esempio lo standard ITU [16], di una decina di ps per nm per km ($D_c = 17ps/(km \cdot nm)$ a $1.55\mu m$). Comunque questo termine varia molto al variare della lunghezza d'onda della portante, per cui per una fibra in silice può assumere approssimativamente valori in un intervallo $[-15, 17]ps/(km \cdot nm)$ per un utilizzo da 1.2 a $1.55\mu m$. A $\lambda = 1.312\mu m$ assume valore 0.

Per quanto riguarda le modulazioni usate, in questo elaborato l'attenzione è verso la tecnica comune di modulare l'intensità di una portante in frequenza ottica nel vicino infrarosso, secondo appunto lo schema IM/DD. Esistono altri schemi di modulazione che sfruttano una modulazione di frequenza e fase, che è attuabile sfruttando le proprietà di coerenza della luce [5, p. 478]. Questi schemi abilitano una rilevazione più performante al costo di maggior complessità realizzativa.

La modulazione di intensità viene attuata tramite la variazione della potenza ottica di un LED o, più spesso, di un laser, da parte di un segnale elettrico. Con questa tecnica sono possibili trasmissioni sia analogiche che digitali ma, concentrandosi solamente sulle tecniche digitali, la modulazione più usata è chiamata OOK (On-Off Keying). In questa modulazione l'alfabeto è composto di soli due simboli (*on* e *off*, ovvero impulso presente e impulso assente). Ci si rende quindi conto dell'importanza della trasmissione di impulsi, e quindi di capire approfonditamente la loro propagazione, che verrà simulata nelle prossime sezioni. Gli impulsi che è possibile trasmettere in fibra sono legati alla tecnologia dei laser: qui si considerano impulsi di forma Gaussiana, e a secante iperbolica, anche se altre forme d'onda sono possibili.

1.3 Non idealità per i sistemi di telecomunicazione

Scendendo di livello di astrazione, si spiegano ora le ragioni fisiche della presenza delle non idealità che sono state incluse nel semplice modello di canale esposto sopra. In seguito si presenta anche un'altra famiglia di fenomeni, non inclusi nel precedente modello, che derivano dalla dinamica non lineare del mezzo. Questi possono diventare molto rilevanti in alcuni casi di utilizzo comune.

1.3.1 Perdite

Quando un segnale si propaga nella fibra una parte della sua potenza viene persa. La perdita di potenza è esponenziale nella distanza percorsa: se P_0 è la potenza in ingresso alla fibra e P_T la potenza che raggiunge il ricevitore

$$P_T = P_0 \exp[-\alpha L]$$

dove L è la lunghezza del collegamento in km e α la costante di attenuazione in Np/km. Vale la conversione $\alpha_{dB} \approx 4.343\alpha$ dove α_{dB} è la costante espressa in dB/km ($10 \log_{10}(e) \approx 4.343$). Possiamo usare questa relazione per scrivere $A_F = \exp[\alpha L]$.

I fenomeni fisici principali che causano la perdita di potenza del segnale sono l'assorbimento del materiale e lo scattering di Rayleigh. Una descrizione dettagliata dell'assorbimento richiede di conoscere approfonditamente la struttura della materia e di applicare tecniche di meccanica quantistica, ma è possibile comunque sfruttare i risultati empirici, che indicano come l'assorbimento si manifesti in picchi (che corrispondono, in realtà, a delle risonanze a livello elettronico o molecolare del materiale). Nel caso della silice lo spettro di assorbimento ha picchi situati negli ultravioletti ($\lambda < 380nm$) e nell'infrarosso lontano ($\lambda > 2\mu m$). Spesso sono presenti impurità rappresentate soprattutto dallo ione OH che, benché possano essere anche molto lievi, causano in aggiunta un picco di assorbimento a $\lambda \approx 2.73\mu m$, con un secondo picco a circa $1.4\mu m$, nella regione di interesse per la trasmissione.

Per quanto riguarda invece lo scattering di Rayleigh, è causato dalle piccole alterazioni locali di densità della fibra, generate in fase di fabbricazione. Queste causano la diffusione di segnale dalla fibra, a prescindere dalla purezza del materiale, e quindi stabiliscono un limite inferiore all'attenuazione. Il meccanismo di scattering di Rayleigh prevede una dipendenza proporzionale a λ^{-4}.

In conclusione le moderne fibre in silice raggiungono il notevole risultato di attenuazioni complessive di $\approx 0.2dB/km$ nella finestra dei $1.55\mu m$.

1.3.2 Group Velocity Dispersion

La presenza di assorbimento non causa solamente perdita di potenza, ma è alla base della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza, infatti, lontano dalle risonanze del materiale, l'indice di rifrazione può venire approssimato tramite la legge di Sellmeier

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2},$$

dove B_j (coefficiente di Sellmeier) quantifica l'assorbimento alla pulsazione ω_j, in cui avviene una risonanza.

È possibile analizzare gli effetti della dispersione incorporandoli nei termini successivi dell'espansione in serie di Taylor della costante di fase β, centrata alla pulsazione ω_0, la pulsazione ottica di centro banda

$$\beta(\omega) := n(\omega)\frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \cdots,$$

$$\text{dove} \quad \beta_k = \left(\frac{d^k\beta}{d\omega^k}\right)(\omega_0) \quad \text{sono i generici coefficienti di tale espansione,}$$

possiamo riscrivere i termini di ordine inferiore più importanti in questo modo

$$\beta_1 = \frac{1}{c}\left(n + \omega\frac{dn}{d\omega}\right) = \frac{1}{v_g},$$
$$\beta_2 = \frac{1}{c}\left(2\frac{dn}{d\omega} + \omega\frac{d^2n}{d\omega^2}\right),$$

dove si evidenzia come il significato fisico di β_1 sia legato al concetto di velocità di gruppo v_g, ovvero la velocità a cui procede l'inviluppo dell'impulso, mentre β_2 sia la dispersione della velocità di gruppo, che dà il nome al fenomeno a cui siamo interessati (in inglese la **Group Velocity Dispersion (GVD)**). Per questo motivo β_2 è spesso denominato anche *parametro di GVD.*

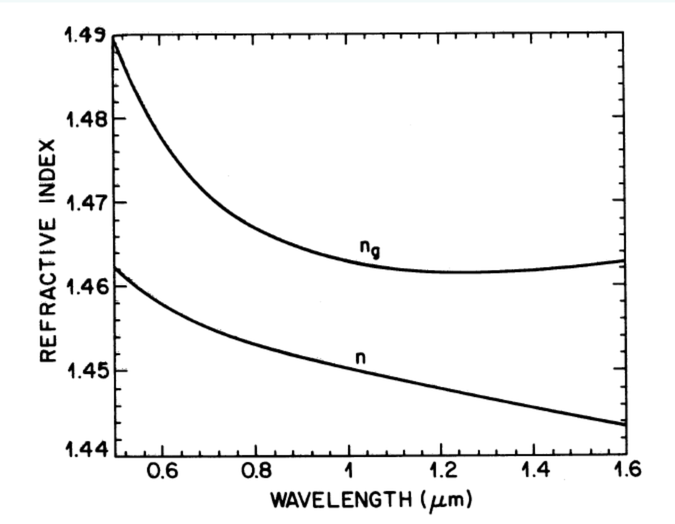

Figura 1.6: Indice di rifrazione e indice di rifrazione di gruppo in silice [1, p. 8]

Definendo $n_g = c/v_g$ indice di gruppo, in figura 1.6 si può osservare come questo parametro varia nella regione spettrale di interesse. Si nota un minimo di n_g vicino a $1.3\mu m$ (precisamente $\lambda_D = 1.27\mu m$, che è detta lunghezza d'onda di dispersione nulla), seguito da un inversione di pendenza. La conseguenza di questo comportamento di n_g è che il carattere della GVD cambia a diverse lunghezze d'onda: per valori inferiori alla λ_D, $\beta_2 > 0$ e le componenti di lunghezza d'onda più corta si propagano più lentamente, mentre per valori superiori a λ_D avviene il contrario, si ha $\beta_2 < 0$ e quindi sono le componenti a lunghezza d'onda più lunga a propagarsi più lentamente. Scegliendo la portante è possibile decidere di avere queste due condizioni operative diverse, che vengono dette rispettivamente *dispersione normale* e di *dispersione anomala*. Infine si collega quando detto per il modello di canale: β_2 influenza D_c tramite questa relazione

$$D_c = -\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\beta_2$$

si noti che a β_2 negativi corrispondono D_c positivi e viceversa. In tutta la discussione appena fatta abbiamo implicitamente trascurato i termini di ordine superiore dell'espansione di $\beta(\omega)$. Questi diventano importanti per lunghezze d'onda prossime a λ_D.

L'effetto principale ai fini delle telecomunicazioni della dispersione è l'allargamento degli impulsi: si studierà il fenomeno nel capitolo di simulazione, con l'aiuto delle tecniche sviluppate in analisi.

1.3.3 Effetti non lineari

Mentre la dinamica dispersiva e l'attenuazione sono regolate dallo spettro di assorbimento, un'altro gruppo di fenomeni emerge dal fatto che la risposta della polarizzazione dei materiali, soprattutto in presenza di campi intensi, dipende da termini non lineari nel campo elettrico. Infatti, se in un dielettrico lineare potevamo usare un modello con il termine di suscettività elettrica χ scritto come una trasformazione lineare, (o una costante di proporzionalità nel caso isotropo), scrivendo la relazione in questo modo: $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \cdot \mathbf{E}$, una rappresentazione più adatta in presenza di campi intensi è quella che include i termini di ordine superiore della suscettività, scritti come tensori (applicazioni multilineari) di rango superiore a 2

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} \cdot_2 \mathbf{EE} + \chi^{(3)} \cdot_3 \mathbf{EEE} + \cdots \right), \tag{1.3}$$

i simboli $\cdot_k$ indicano operazioni multilineari dette contrazioni tensoriali ovvero, per esempio

$$\left[\chi^{(3)} \cdot_3 \mathbf{EEE}\right]_n = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \chi^{(3)}_{nijk} E_i E_j E_k.$$

Nel caso della silice, data la simmetria della molecola SiO_2, il tensore $\chi^{(2)}$ ha tutti gli elementi nulli. In condizioni usuali il termine $\chi^{(3)}$, il prossimo più importante, causa principalmente una variazione non lineare dell'indice di rifrazione

$$\widetilde{n}(\omega, \mathbf{E}) = n(\omega) + n_2 |\mathbf{E}|^2 \tag{1.4}$$

dove $n(\omega)$ è l'indice di rifrazione dato dalla legge di Sellmeier ed n_2 è legato alla suscettività del terzo ordine tramite

$$n_2 = \frac{3}{8n} \Re\left[\chi^{(3)}\right]$$

Usando l'ipotesi in cui il campo sia polarizzato in modo che solo una componente del tensore contribuisca al risultato, si può trattarlo come uno scalare. Si nota però che la natura intrinsecamente tensoriale di $\chi^{(3)}$ può influenzare la polarizzazione degli impulsi mediante birifrangenza non lineare. Gli effetti che scaturiscono dalla dipendenza non lineare dell'indice di rifrazione dall'intensità sono molteplici: i più studiati sono l'automodulazione di fase (in inglese Self Phase Modulation (SPM)) e la modulazione incrociata della fase (in inglese Cross Phase Modulation (XPM)).

1.3.4 Self Phase Modulation

Il fenomeno non lineare di interesse per questa trattazione è una modulazione di fase. In generale, quando un impulso si propaga in una fibra di lunghezza L, la sua fase cambia con la legge

$$\phi = nk_0L,$$

con k_0 costante di fase. Nell'eventualità in cui n sia variabile con l'intensità del campo, l'impulso stesso modula un cambiamento di fase della portante ottica locale in accordo con la sua intensità, poiché

$$\phi = n(\omega, \mathbf{E})k_0L.$$

Rispetto alla variazione di fase ottenibile senza modulazione, questa variazione è proporzionale all'intensità, infatti, sostituendo la 1.4,

$$\phi = (n + n_2|\mathbf{E}|^2)k_0L$$

È proprio grazie al termine non lineare che possiamo definire una componente di sfasamento modulata in modo proporzionale all'intensità

$$\phi_{NL} = n_2|\mathbf{E}|^2k_0L.$$

Il fatto che sia proprio l'intensità dello stesso campo a modulare la sua fase dà il nome al fenomeno detto automodulazione di fase **(SPM)**.

A causa della variazione non lineare della fase si verifica un allargamento spettrale dovuto alla derivata temporale di ϕ_{NL}. Quantificheremo e osserveremo questo effetto in fase di simulazione.

È necessario specificare con il termine *auto* (rispettivamente *self* in inglese) l'interazione, per distinguerlo da ciò che succede quando il cambiamento di fase su un campo è indotto da un altro campo, differente dal primo in lunghezza d'onda, direzione, oppure stato di polarizzazione: in questo caso infatti si parla di modulazione incrociata della fase (XPM).

1.3.5 Ulteriori effetti non lineari, lunghezza efficace

Se consideriamo le interazioni non lineari descritte sopra dal punto di vista energetico, possiamo interpretarle come fenomeni elastici, ossia in cui l'energia del campo non viene scambiata con il mezzo. Esiste una seconda classe di fenomeni non lineari che prendono il nome di Stimulated Inelastic Scattering, in cui invece questo avviene, grazie all'eccitazione dei modi vibrazionali della silice oppure ad onde di pressione. A questa classe appartengono Stimulated Raman Scattering (SRS) e Stimulated Brillouin Scattering (SBS). La descrizione teorica dei due fenomeni richiede un approccio quanto-meccanico.

Per costruire un modello completo del canale di trasmissione end-to-end in fibra ottica si dovrà integrare il modello proposto in (1.2.2) con una descrizione dei fenomeni non lineari descritti sopra. È utile sapere allora che rilevanza hanno questi in rapporto alle altre non idealità del mezzo. In effetti il contributo alla fase della SPM è proporzionale a n_2, che nelle fibre in silice assume valori intorno a $2.2 \div 3.4 \cdot 10^{-20} m^2/W$. All'incirca lo stesso vale per i fenomeni di stimulated inelastic scattering. Tuttavia non è lecito trascurare gli effetti non lineari, che sono nella realtà facilmente osservabili. Il motivo è dovuto alle condizioni in cui la fibra viene usata nella pratica. La dipendenza dal quadrato del campo elettrico si traduce in una dipendenza dall'intensità. Ma nelle fibre ottiche, per la ridotta dimensione del nucleo, l'intensità è localmente elevata rispetto a numerose altre applicazioni. Inoltre il fatto che l'attenuazione sia molto bassa permette di avere intensità molto elevate che interagiscono con il mezzo per lunghe distanze. In effetti una buona metrica per confrontare mezzi non lineari in cui un campo si propaga (guidato) è il prodotto intensità per lunghezza di interazione. Consideriamo l'attenuazione: $I(z) = I_0 \exp[-\alpha z]$, un contributo infinitesimo al prodotto è dato da $I(z) \cdot dz$, integrando quindi

$$(IL_{eff}) = \int_0^L I_0 \exp[-\alpha z] dz.$$

Ma dato che

$$I_0 = \frac{P_0}{\pi w_0^2},$$

$$\text{allora} \qquad (IL_{eff}) = \frac{P_0}{\pi w_0^2} \frac{1 - \exp(-\alpha L)}{\alpha},$$

dove $\pi w_0 = A_{eff}$ è detta area efficace e dipende dal raggio del nucleo (come vedremo successivamente la potenza non è confinata in modo esatto nel nucleo).

Abbiamo di fatto definito una quantità utile che indica una lunghezza equivalente di interazione, la *lunghezza efficace*

$$L_{eff} = \frac{1 - \exp(-\alpha L)}{\alpha}.$$

Si noti che nel caso l'attenuazione sia nulla, la lunghezza efficace coincide con quella fisica

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \exp(-\alpha L)}{\alpha} = L.$$

Capitolo 2

Analisi

Lo scopo di questo capitolo è descrivere i principi della teoria della propagazione guidata di impulsi in una fibra monomodale in cui si considerano gli effetti non lineari e dispersivi.

Una trattazione completa e dettagliata della derivazione della legge di propagazione degli impulsi dai principi fisici esula dagli scopi di questo elaborato, quindi si introducono le approssimazioni operative che permetteranno una prima semplice analisi simulativa, rimandando ad altri testi per la loro piena derivazione dalle equazioni di Maxwell. Percorrendo i punti principali della derivazione si potrà inquadrare in maniera più chiara il senso fisico dell'equazione che per cui sarà successivamente implementata la soluzione numerica.

2.1 Commenti preliminari

Spesso quando viene studiata la propagazione all'interno di una fibra ottica si ricorre ad una rappresentazione in ottica geometrica per cui, sfruttando la legge di Snell all'interfaccia tra nucleo e mantello, si ottiene una caratterizzazione del meccanismo di riflessione interna totale, responsabile del confinamento dell'energia elettromagnetica lungo la fibra. Questa trattazione permette di ricavare molti risultati interessanti, come ad esempio di intuire il fenomeno di dispersione di guida d'onda o dispersione modale.

L'ottica geometrica ha il vantaggio di essere facilmente comprensibile ed intuitiva, ma è in effetti, un'approssimazione rispetto alla vera teoria fisica che sottostà alla propagazione, ovvero l'elettromagnetismo. Si può quindi affermare che l'*ottica geometrica* è inclusa nell'*ottica fisica* (ovvero la teoria dei campi elettromagnetici applicata a problemi ottici), e quindi quest'ultima ha portata più ampia.

Il punto di contatto tra le due descrizioni è l'*approssimazione d'iconale* (*eikonal approximation* in inglese), che descrive come, di fatto, l'ottica geometrica derivi dalle equazioni di Maxwell tramite l'approssimazione $\lambda \to 0$.[†]

Mentre per le fibre multimodali con diametri di nucleo dell'ordine di grandezza dei $50\mu m$ questa approssimazione è pienamente valida, per fibre monomodali il diametro si riduce a tal punto da essere comparabile con la lunghezza d'onda della luce guidata. In questo caso un analisi con l'ottica geometrica non è più pienamente sufficiente, ed è necessario ricorrere all'ottica fisica. Si deve quindi introdurre una descrizione in termini di teoria elettromagnetica della fibra, che rappresenta in questi termini una guida dielettrica cilindrica. In questo modello si includerà il comportamento del materiale fino al livello di dettaglio di dispersione cromatica e non linearità così come descritte in precedenza.

[†] Il lettore può trovare un'interessante trattazione in [6, p. 368] e [7, p. 110].

2.2 Propagazione di impulsi

2.2.1 Approccio analitico

Si richiamano qui le equazioni di Maxwell in un mezzo generico in unità SI, assieme alle relazioni costitutive:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \qquad \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \qquad \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
\end{aligned}
$$

Nel caso di interesse non vi sono né cariche, né correnti libere, quindi imponiamo $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$. Si determinano quindi le equazioni vettoriali delle onde: applicando il rotore ad entrambi i membri della prima equazione di Maxwell e sostituendo la seconda, si ottiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \tag{2.1}$$

e usando la relazione costitutiva per $\mathbf{D}$ si evidenzia il contributo della polarizzazione del mezzo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \tag{2.2}$$

dove $1/c^2 = \mu_0 \varepsilon_0$, con c uguale alla velocità della luce nel vuoto.

Per ottenere una soluzione di questa equazione che tenga conto della componente non lineare della polarizzazione (così come descritta nell'espansione 1.3) si usa un procedimento perturbativo. Consideriamo una frequenza ottica distante dalle risonanze del materiale: includendo solo i termini del primo e terzo ordine per la suscettività otteniamo una scomposizione $\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}$, in cui, esplicitando i prodotti

$$\mathbf{P}_L = \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}} \chi^{(1)}(t-\tau) \cdot_1 \mathbf{E}(\mathbf{r},\tau) d\tau, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{P}_{NL} = \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \chi^{(3)}(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \cdot_3 \mathbf{E}(\mathbf{r},\tau_1)\mathbf{E}(\mathbf{r},\tau_2)\mathbf{E}(\mathbf{r},\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \tag{2.4}$$

queste equazioni, valide secondo un modello a dipolo locale per la polarizzazione, indicano la risposta non istantanea delle polarizzazioni nel termine di primo ordine $\mathbf{P}_L$ (responsabile del comportamento dispersivo) e di terzo ordine $\mathbf{P}_{NL}$ (responsabile del comportamento non lineare).

L'approccio perturbativo consiste nel considerare la componente non lineare come una perturbazione rispetto alla polarizzazione lineare. Questa approssimazione è ben fondata dato che nella silice gli effetti non lineari sono molto meno intensi della parte lineare. Il procedimento di soluzione di 2.2 può iniziare dal risolvere l'equazione con il solo termine lineare della polarizzazione, per cui, sfruttando la linearità, possiamo usare il metodo di Fourier. Infatti, data l'ipotesi che il campo sia allineato in modo che solo una componente del tensore $\chi^{(1)}$ contribuisca al prodotto, possiamo considerare effettivamente la sua trasformata $\widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ come uno scalare complesso, quindi possiamo scrivere la polarizzazione nel dominio dei fasori†:

$$\widetilde{\mathbf{P}}_L(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon_0 \widetilde{\chi}^{(1)}(\omega) \cdot_1 \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega),$$

†Le notazioni per i campi nel dominio del tempo e quelli nel dominio dei fasori non sono uniformi nei vari testi: qui si usa la notazione di Agrawal [1].

Si giunge quindi ad un'equazione in cui si sono eliminati gli altri campi in favore di $\widetilde{\mathbf{E}}$. Questa formulazione sarà comprensiva di effetti di dispersione poiché $\widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ non è costante in ω. Se introduciamo un termine di permittività dipendente dalla frequenza

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \widetilde{\chi}^{(1)}(\omega),$$

l'equazione si presenta nella seguente forma

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

Possiamo dare un'interpretazione più fisica a $\varepsilon(\omega)$ [6, p. 301] ricordando i ruoli della parte reale ed immaginaria del numero d'onda in un'equazione di Helmholtz

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} = \beta + i\frac{\alpha}{2}, \\ \varepsilon(\omega) &= \left(\frac{\beta(\omega)c}{\omega} + i\frac{\alpha(\omega)c}{2\omega}\right)^2 \\ &= \left(n(\omega) + i\frac{\alpha(\omega)c}{2\omega}\right)^2, \end{aligned}$$

questo collega quanto detto in precedenza sull'attenuazione e l'indice di rifrazione, in relazione all'equazione fondamentale 2.2.

Se la frequenza è lontana dalle risonanze del mezzo (in cui si hanno perdite elevate), è possibile trascurare l'attenuazione in questa prima analisi, e considerarla successivamente in termini di una perturbazione, quindi

$$\varepsilon(\omega) \approx n^2(\omega).$$

Nel fare questa approssimazione si esclude esplicitamente una particolare eventualità, descritta da Sommerfeld e Brillouin in [4]: quando in un mezzo dispersivo si propaga un segnale a frequenza molto vicina ad una frequenza di assorbimento del materiale, avviene la propagazione di precursori, ovvero onde alla stessa velocità della luce nel vuoto, che anticipano l'arrivo della parte più intensa del segnale che invece si propaga a velocità $c/n(\omega)$. In questo caso non si considera questa eventualità, perché le frequenze di assorbimento della silice sono distanti dalle regioni operative, ma è comunque bene ribadire che l'analisi fatta in questa sezione non è del tutto generale.

Infine, data l'omogeneità di $\varepsilon \approx n^2(\omega)$ in entrambi i materiali che costituiscono il nucleo ed il mantello, si può scrivere $\varepsilon\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{E}} = \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{D}} = 0$ e semplificare il termine al primo membro con la seguente identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{\mathbf{E}} = \nabla(\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{E}}) - \nabla^2\widetilde{\mathbf{E}} = -\nabla^2\widetilde{\mathbf{E}}.$$

Si ottiene quindi un'equazione di Helmholtz su cui possiamo applicare le condizioni al contorno per trovare i modi di propagazione.

$$\nabla^2\widetilde{\mathbf{E}} + n^2(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\widetilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{2.5}$$

2.2.2 Modi di propagazione

La soluzione dettagliata dell'equazione esula dallo scopo di questa tesi, ma per avere un quadro operativo minimo ed una comprensione generale del procedimento si descrivono i passaggi principali che portano alla soluzione, in cui vengono introdotte alcune grandezze che si utilizzeranno successivamente.

Si riscrive la 2.5 in coordinate cilindriche

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + n^2\frac{\omega^2}{c^2}\widetilde{\mathbf{E}} = 0, \tag{2.6}$$

in cui z è l'asse della fibra. Assieme all'analoga equazione per il campo $\widetilde{\mathbf{H}}$ ed alle equazioni di Maxwell si possono determinare completamente i campi risolvendo per due componenti, ad esempio $\widetilde{E}_z$ e $\widetilde{H}_z$. Usando la tecnica della separazione delle variabili, si riscrive la componente $\widetilde{E}_z$ fattorizzandola in parti che dipendono, separatamente, dalle coordinate

$$\widetilde{E}_z(\mathbf{r}, \omega) = A(\omega)F(\rho)\exp(\pm im\phi)\exp(i\beta(\omega)z) \tag{2.7}$$

A questo punto la soluzione si determina con la sostituzione di questa espressione per $\widetilde{E}_z$ nella 2.6, da cui si deduce un'equazione per F ([1, p. 35]). La distribuzione radiale ed angolare del campo, completamente definite da $F(\rho)$ ed m, è risolta per una molteplicità discreta di funzioni, scandite dall'avanzamento di una coppia di parametri interi n, m. Ognuna di queste soluzioni viene detta modo. Le soluzioni sono riassumibili in due famiglie HE_{mn} e EH_{mn}, che rappresentano, per $m > 0$, distribuzioni in cui tutte le componenti dei campi sono non nulle, e due famiglie TE_{0p} e TM_{0p}, in cui rispettivamente $E_z = 0$ ed $H_z = 0$.

Nel caso delle fibre monomodali, la condizione $V := k_0 a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} < 2.405$, limita le soluzioni al solo modo HE_{11}, detto anche modo fondamentale, la fibra appunto è monomodale.

2.2.3 Il modo fondamentale

Per il modo fondamentale, HE_{11}, il campo $\mathbf{E}$ è distribuito in modo che le componenti trasversali siano dominanti, per questo si può parlare con buona approssimazione di polarizzazione lineare del campo in fibra (esistono in realtà due modi, corrispondenti a due assi cartesiani di polarizzazione $\hat{x}$ e $\hat{y}$). Per indicare la polarizzazione lineare si fa uso della notazione LP (Linearly Polarized), il modo HE_{11} secondo questa notazione è corrispondente al modo LP_{01}. Supponendo che un impulso lanciato con una certa polarizzazione la mantenga lungo tutta la fibra (ovvero trascurando l'effetto della birifrangenza aleatoria), ed usando l'approssimazione di campo elettrico trasversale, si può allora scrivere in coordinate cartesiane

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = [A(\omega)F(\rho)\exp(i\beta(\omega)z)]\,\hat{\mathbf{x}}$$

La distribuzione trasversa, determinata dalla sostituzione di 2.7 in 2.6, risulta essere una funzione di Bessel, che in questo caso è bene approssimata da una gaussiana

$$F(\rho, \phi) \approx \exp(-\rho^2/w^2)$$

Dove w è un parametro di fit, quando $V \approx 2$ allora $w \approx a$.

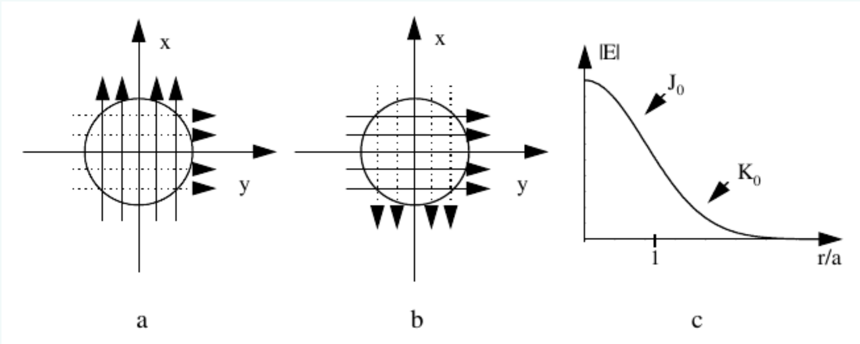

Figura 2.1: I due stati di polarizzazione per il modo LP_{01} in sezione trasversale: le linee continue rappresentano $\mathbf{E}$ e quelle tratteggiate $\mathbf{H}$, a) polarizzazione x, b) polarizzazione y, c) distribuzione radiale del campo (J_0 e K_0 sono funzioni di Bessel) [11, p. 366]

2.2.4 Perturbazione ed equazione NLS

In questa sezione, introducendo ulteriori approssimazioni, si ricava un'equazione per la propagazione degli *impulsi*, sotto le seguenti ipotesi

1. $\mathbf{P}_{NL}$ sia una piccola perturbazione di $\mathbf{P}_L$,
2. lo stato di polarizzazione si preservi lungo la fibra,
3. lo spettro dell'impulso abbia larghezza ridotta (i.e. l'impulso abbia durata $> 0.1ps$).

Grazie all'ipotesi 2 (unita al poter assumere come scalari i coefficienti di suscettività) si può usare un approccio scalare per valutare il campo elettrico, che grazie alla 3 si approssima in questo modo (senza perdita di generalità si considera una polarizzazione lungo $\hat{\mathbf{x}}$)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[E(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)\right]\hat{\mathbf{x}}, \tag{2.8}$$

ottenendo il temine chiave per le analisi successive: $E(\mathbf{r},t)$ è un inviluppo *lentamente variabile*, ed ω_0 è la pulsazione della portante ottica. Allo stesso modo, ricordando l'ipotesi del carattere scalare di $\chi^{(1)}$ e $\chi^{(3)}$, si possono descrivere le polarizzazioni $\mathbf{P}_L, \mathbf{P}_{NL}$, ovvero con vettori paralleli a $\hat{\mathbf{x}}$.

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[P_L(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)\right]\hat{\mathbf{x}}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[P_{NL}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)\right]\hat{\mathbf{x}}. \tag{2.10}$$

Per il termine lineare vale la relazione di convoluzione per $\chi^{(1)}$ descritta in 2.3, invece si introduce una semplificazione di risposta istantanea della polarizzazione $\chi^{(3)}$ per cui

$$\mathbf{P}_{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \cdot_3 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t),$$

fisicamente questa approssimazione corrisponde a trascurare il contributo delle vibrazioni molecolari, ovvero l'effetto Raman. Questo è accettabile per impulsi di durata $> 1ps$. Trascurando la generazione di terza armonica, si può usare il risultato appena raggiunto per esprimere l'inviluppo (lentamente variabile) di $\mathbf{P}_{NL}$ in termini di E

$$P_{NL}(\mathbf{r},t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\mathbf{r},t) \tag{2.11}$$

dove il termine ε_{NL} è definito da

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)}|E(\mathbf{r},t)|^2$$

Calcolando la trasformata $\widetilde{E}(\mathbf{r},t)$ di $E(\mathbf{r},t)$ si determina la seguente equazione di Helmholtz

$$\nabla^2\widetilde{E} + \varepsilon(\omega)k_0^2\widetilde{E} = 0 \tag{2.12}$$

dove l'effetto delle polarizzazioni lineare e non lineare è incorporato in $\varepsilon(\omega)$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \widetilde{\chi}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL},$$

la scomposizione vista in precedenza per ε fornisce

$$\varepsilon = \left(\widetilde{n} + i\frac{\widetilde{\alpha}c}{2\omega}\right)^2$$

dove $\widetilde{n} = n + n_2|E|^2$, e $\widetilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2|E|^2$

I termini che esprimono il comportamento non lineare sono relazionati con $\chi^{(3)}$ da

$$n_2 = \frac{3}{8n}\Re\left[\chi^{(3)}\right], \qquad \alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc}\Im\left[\chi^{(3)}\right].$$

Tutto ciò mostra il tipo di interazione dei termini modulati dall'intensità, che contribuiscono sia alla non linearità dell'indice di rifrazione sia all'attenuazione. Tuttavia nel nostro caso possiamo trascurare il coefficiente α_2 poiché è molto basso nella silice. L'approccio perturbativo considererà quindi una variazione di ε secondo questa forma

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2$$

dove

$$\Delta n = n_2|E|^2 + i\frac{\widetilde{\alpha}c}{2\omega}$$

dove sia il contributo di attenuazione sia quello di non linearità vengono inseriti come piccole perturbazioni (viene inoltre fatto uso dell'approssimazione $(n+\Delta n)^2 \approx n^2+2n\Delta n$).

L'equazione di Helmholtz per l'inviluppo può essere risolta ancora con la separazione delle variabili, infatti si ipotizza questa forma per l'inviluppo

$$\widetilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x,y)\widetilde{A}(z, \omega - \omega_0)\exp(i\beta_0 z),$$

dove $F(x,y)$ è la distribuzione del modo e $\widetilde{A}$ è una funzione lentamente variabile in z. Sostituendo nella 2.12 si ottengono un'equazione per F ed una per $\widetilde{A}$. Ciò a cui si è interessati è l'equazione per $\widetilde{A}$, che rappresenta lo spettro dell'inviluppo. Nell'ipotesi in cui questo spettro sia lentamente variabile, alcuni passaggi matematici [1, p. 42-43] portano a questa espressione

$$\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial z} = i\left[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0\right]\widetilde{A},$$

in cui $\Delta\beta$ è ricavato a partire dalla perturbazione Δn dell'indice di rifrazione e quantifica le conseguenze di attenuazione e variazione non lineare dell'indice di rifrazione. Sviluppando ora in serie di potenze $\beta(\omega)$, e limitando l'espansione al termine del secondo ordine, è possibile, tornando nel dominio del tempo, scrivere

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial A^2}{\partial t^2} + i\Delta\beta A. \tag{2.13}$$

Il metodo perturbativo fornisce questa espressione per $\Delta\beta$

$$\Delta\beta = \gamma |A|^2 + i\frac{\alpha}{2}$$

dove γ $[W^{-1}m^{-1}]$ è chiamato *coefficiente di non linearità* e vale

$$\gamma = \frac{n_2\omega_0}{cA_{eff}},$$

in cui il parametro A_{eff} indica l'area efficace che dipende dalla distribuzione trasversale del modo $F(x, y)$.

Si arriva infine all'equazione cercata, che regola l'evoluzione dell'inviluppo del campo nel dominio del tempo

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial A^2}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{2}A + i\gamma |A|^2 A. \tag{2.14}$$

È conveniente usare il cambio di variabili $T = t - z/v_g = t - \beta_1 z$ (cambio del sistema di riferimento), ovvero traslare la coordinata temporale centrandola all'istante di arrivo dell'impulso alle varie posizioni z. In questo modo si ottiene un'equazione indipendente da β_1

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}A - i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial A^2}{\partial T^2} + i\gamma |A|^2 A. \tag{2.15}$$

Questa equazione viene spesso chiamata *equazione non lineare di Schrödinger* (Nonlinear Schrödinger Equation, NLSE) poiché, come si vedrà nel prossimo paragrafo, può essere ricondotta proprio alla forma canonica dell'equazione suddetta se sussistono alcune condizioni.

2.2.5 Enfasi sulle approssimazioni e limiti di validità

Si riassumono in questo paragrafo le approssimazioni usate che limitano la generalità del metodo.

- Si considera $\chi^{(1)}$ e $\chi^{(3)}$ come scalari, e la polarizzazione del campo si preserva,
- $\chi^{(3)}(t_1, t_2, t_3) = \chi^{(3)}\delta(t_1)\delta(t_2)\delta(t_3)$, ovvero la polarizzazione non lineare è un fenomeno istantaneo,
- Le frequenze dei segnali che si propagano sono lontane dalle risonanze del mezzo e consideriamo il contributo dell'attenuazione ad ε piccolo,
- Gli impulsi presentano inviluppi lentamente variabili.

2.3 Formulazioni normalizzate equivalenti

Per poter evidenziare in modo più marcato il comportamento dell'impulso in presenza di fenomeni diversi, oppure per condurre analisi dettagliate, è utile riformulare diversamente l'equazione 2.15. Si introducono quindi in questa sezione delle nuove coordinate, funzioni delle coordinate fisiche di spazio e tempo, che includano anche le caratteristiche dell'impulso e della fibra. Si definiscono preliminarmente i parametri che quantificano gli effetti dispersivi e non lineari

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \qquad \text{lunghezza di dispersione,}$$
$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \qquad \text{lunghezza di non linearità,}$$

questi sono omogenei ad una lunghezza, e sono funzioni di T_0 larghezza dell'impulso (ad intensità $1/e$ rispetto al picco) e di P_0 potenza del picco dell'impulso. Un altro parametro derivato importante è N, definito da $N^2 = L_D/L_{NL}$.

Possiamo inserire L_D ed L_{NL} nella 2.15 con il seguente cambio di variabili

- normalizzazione della coordinata temporale

$$\tau = \frac{T}{T_0} \qquad \text{[adim.],}$$

- normalizzazione dell'ampiezza rispetto al picco d'ampiezza ed all'attenuazione

$$U(z,T) := \frac{A(z,T)}{\sqrt{P_0}\, e^{-\frac{\alpha}{2}z}}$$

L'equazione 2.15 si traduce quindi in questa forma

$$i\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\exp[-\alpha z]}{L_{NL}}\, |U|^2\, U, \tag{2.16}$$

in particolare possiamo dire che quando $L << L_D,\ L << L_{NL}$ la propagazione non risente sensibilmente degli effetti di dispersione e non linearità. A volte è più significativo considerare quest'ultima formulazione "normalizzata" rispetto alla 2.15, che ha invece dimensioni fisiche reali.

Spingendo ulteriormente il processo si normalizza anche la coordinata spaziale usando

$$\xi = \frac{z}{L_D} \qquad \text{[adim.],}$$

infine eliminando L_D ed L_{NL} in favore di N

$$i\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \exp[-\alpha z] N^2\, |U|^2\, U. \tag{2.17}$$

Nel caso di l'assenza di attenuazione, incorporando N nella definizione di ampiezza $u = NU = \sqrt{\gamma L_D} A$ si ottiene

$$i\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - |u|^2\, u,$$

dove, ammettendo che $\text{sgn}(\beta_2) < 0$, ovvero di essere in dispersione anomala (caso particolarmente interessante per l'analisi della propagazione di solitoni), finalmente si scrive l'equazione non lineare di Schrödinger (NLS) nella sua forma canonica:

$$i\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2\, u = 0. \tag{2.18}$$

Nella simulazione la scelta delle coordinate usate caso per caso sarà evidente dalle espressioni sugli assi dei grafici, a scanso di fraintendimenti. Si noti comunque che in assenza di attenuazione i grafici di $U(z,T)$ ed $A(z,T)$ differiscono solo per una costante moltiplicativa, e quindi sono interscambiabili nelle analisi che seguono.

Capitolo 3

Simulazione

L'equazione della propagazione di impulsi contenente i termini di attenuazione e quelli del primo ordine di non linearità e dispersione, che si vuole risolvere è la seguente

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}A - i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial A^2}{\partial T^2} + i\gamma\left|A\right|^2 A. \tag{3.1}$$

Tranne alcuni casi (descritti in seguito) in cui si annullano alcuni coefficienti, non è possibile risolvere analiticamente questa equazione. Le tecniche numeriche che è possibile implementare per simularla sono principalmente il metodo Split Step Fourier (**SSF** method o SSFM) oppure il metodo delle differenze finite (**FDM**). La differenza principale tra i due è che il metodo SSF sfrutta l'efficienza della trasformata veloce di Fourier (FFT) per svolgere alcuni passi di computazione nel dominio della frequenza.

Un'analisi simulativa particolarmente accurata può essere eseguita senza appoggiarsi alla NLSE, con il metodo **FDTD** (Finite Difference Time Domain) risolvendo direttamente le equazioni di Maxwell nel mezzo con un numero minimo di approssimazioni. Chiaramente un approccio di questo tipo ha bisogno di una discretizzazione sufficiente a descrivere i campi alla frequenza ottica della portante. Una soluzione così dettagliata richiede un passo temporale più piccolo di $2\pi/\omega_0$ ed un passo spaziale più piccolo di λ_0, generando quindi mesh di punti molto grandi [1, p. 55].

La seguente implementazione invece, basata sull'algoritmo SSF si avvantaggia con il passaggio agli inviluppi lentamente variabili descritto in (2.2.4) e riassunto nella NLSE.

3.0.1 Il metodo Split Step Fourier

Per capire come discretizzare l'equazione secondo il metodo SSF ci avvaliamo di alcuni risultati derivanti dalla teoria matematica del calcolo operazionale, come l'esponenziazione di operatori ed il teorema di shift. Dato che la trattazione non sarà matematicamente dettagliata si rimanda a [9] e [8] per un approfondimento del tema. Uno dei punti di forza di questa teoria è la definizione di operazioni su operatori differenziali. Possiamo innanzitutto esprimere l'equazione 3.1 usando un formalismo di operatori differenziali. Definiamo gli operatori per la parte lineare ($\hat{D}$) e per la parte non lineare ($\hat{N}$):

$$\hat{D} = -\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\alpha}{2} \tag{3.2}$$

$$\hat{N} = i\gamma\left|A\right|^2 \tag{3.3}$$

Possiamo riscrivere la (3.1) in forma simbolica:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A \tag{3.4}$$

Moltiplichiamo per h, che rappresenterà il passo di discretizzazione spaziale

$$\begin{aligned} h\frac{\partial A(z,T)}{\partial z} &= h(\hat{D}+\hat{N})A(z,T) && h \in \mathbb{R}_0^+ \\ \exp\left(h\frac{\partial}{\partial z}\right)A(z,T) &= \exp(\,h(\hat{D}+\hat{N}\,))A(z,T) && \text{esponenziando gli operatori} \\ A(z+h,T) &= \exp(\,h\hat{D}+h\hat{N}\,)A(z,T) && \text{usando il teorema di shift} \end{aligned}$$

Ora si richiama l'identità di Baker-Campbell-Hausdorff per esponenziali di operatori: se $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ sono operatori, (in generale non commutativi)

$$\exp(\hat{X})\exp(\hat{Y}) = \exp\left(\hat{X}+\hat{Y}+\frac{1}{2}\left[\hat{X},\hat{Y}\right]+\frac{1}{12}\left[\hat{X}-\hat{Y},\left[\hat{X},\hat{Y}\right]\right]+\dots\right) \tag{3.5}$$

dove $[\hat{X},\hat{Y}] := \hat{X}\hat{Y}-\hat{Y}\hat{X}$, sono chiamati commutatori.

Si noti che nel caso in cui $\hat{X} = h\hat{D}$ e $\hat{Y} = h\hat{N}$, i termini espressi con i commutatori dipendono da h^i con $i > 1$, quindi nell'ipotesi in cui h sia un passo sufficientemente piccolo possiamo trascurarli ed arrivare all'approssimazione che rende il metodo implementabile

$$\begin{aligned} \exp\left(\hat{X}+\hat{Y}\right) &\approx \exp(\hat{X})\exp(\hat{Y}), \\ A(z+h,T) &\approx \exp(h\hat{D})\exp(h\hat{N})A(z,T). \end{aligned}$$

Infatti usando questa approssimazione si può suddividere l'avanzamento spaziale dell'impulso, ai diversi istanti di tempo, in due *passi* di computazione, da cui il nome "Split Step". Il primo sarà il passo lineare, dell'operatore $\hat{D}$, e sarà svolto sfruttando il metodo della trasformata di Fourier, che permette di riscrivere l'operatore $\partial/\partial T$ come moltiplicazione per $i\omega$:

$$\exp(h\hat{D})A(z,T) = \mathcal{F}^{-1}\left[\exp(\hat{D}(i\omega))\,\mathcal{F}\left[A(z,T)\right]\right] \tag{3.6}$$

Il secondo passo sarà invece quello non lineare, e sarà svolto nel dominio del tempo.

Questo metodo offre dei vantaggi dal punto di vista della velocità computazionale grazie all'efficienza degli algoritmi per il calcolo della DFT.

3.1 Implementazione

3.1.1 Parametri

I parametri di simulazione scelti, che stabiliscono lo scenario di simulazione, riassumono le seguenti proprietà del sistema da simulare

- Caratteristiche della fibra (lunghezza, attenuazione, dispersione e non linearità alla pulsazione della portante ω_0),
- Caratteristiche dell'impulso (larghezza, forma, potenza),
- Caratteristiche della discretizzazione (finestra temporale, passi temporale e spaziale).

Nelle parti successive ci si riferirà a queste grandezze secondo questa tabella di corrispondenza

Nome	**Descrizione**	**Variabile**
T	Finestra temporale attorno all'impulso	`T`
dt	Passo di discretizzazione temporale	`dt`
P_0	Potenza ottica al picco dell'impulso iniziale	`P0`
T_0	Metà della durata ad intensità $> P_0/e$ $(-1Np)$	`T0`
Forma	Forma dell'impulso iniziale (gaussiano o a sech)	`sech_flag`
L	Lunghezza complessiva della fibra	`L`
dz	Passo di discretizzazione spaziale	`dz`
α	Parametro di attenuazione	`alpha`
β_2	Parametro di dispersione	`beta_2`
γ	Parametro di non linearità	`gamma`

Tabella 3.1: Parametri di simulazione

3.1.2 Generazione degli impulsi

Questo simulatore supporta impulsi di tipo Gaussiano e a secante iperbolica. Le ampiezze degli impulsi generati seguono questa forma se Gaussiani:

$$A(0,T) = \sqrt{P_0}\,\exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \tag{3.7}$$

Oppure questa se a secante iperbolica:

$$A(0,T) = \sqrt{P_0}\,\mathrm{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \tag{3.8}$$

In questo modo la potenza a $T = 0$ è massima, e vale P_0.

3.1.3 Stabilità del metodo

Il metodo può dare risultati inattendibili quando la risoluzione temporale, spaziale, o nella frequenza sono insufficienti. Ricordando tuttavia il commento in paragrafo (1.3.4), la SPM non porta a perdite di potenza, e questo non è il caso nemmeno per la GVD. In assenza di attenuazione abbiamo quindi che l'energia dell'impulso, ovvero l'integrale del quadrato dell'inviluppo, deve rimanere costante. Utilizzeremo questo principio come indicatore per verificare, volta per volta, che la simulazione sia sufficientemente corretta.

$$\sum_{t=0}^{\lfloor T/dt \rfloor} |A(z,T)|^2 = cost. \qquad \forall z \tag{3.9}$$

Inoltre, per alcune configurazioni di parametri, in particolare quando si annullano dispersione e/o non linearità, l'equazione NLS è risolvibile analiticamente, per cui in questi casi disponiamo di un ulteriore metodo di validazione della correttezza del simulatore.

3.1.4 Pseudocodice e complessità computazionale

Il risultato che si intende raggiungere con il metodo è una descrizione completa dell'inviluppo dell'impulso in ogni posizione della fibra per l'intervallo temporale definito attorno al tempo di arrivo dell'impulso ($T = 0$). La descrizione comprende anche il suo spettro. La struttura dati che useremo sarà una semplice matrice di $n = \lfloor T/dt \rfloor$ righe e $m = \lfloor L/dz \rfloor$

colonne (${}_n\mathbb{C}_m$). Nel programma ci saranno due copie di tale struttura, una per l'ampiezza `A`, ed una per lo spettro `A_spect`. Gli interi n ed m rappresentano la dimensione di una generica istanza di simulazione.

Notazione Per illustrare l'algoritmo si presenta un estratto opportunamente modificato del codice Matlab (pseudocodice), per facilitare la lettura, supponendo che il lettore sia familiare con il linguaggio. L'analisi conseguente terrà conto della molteplicità di operazioni elementari raggruppate dalle istruzioni vettorizzate.

```
% calcolo le dimensioni della mesh
n = floor(T/dt);
m = floor(L/dz);

% inizializzo i vettori di tempo, spazio e pulsazione
time = linspace(-T/2, T/2, n);
space = linspace(0, L, m);
w = 2*pi* linspace(-1/(2*dt), 1/(2*dt), n);
w = fftshift(w);

% inizializzo la struttura dati per l'ampiezza
A = zeros(n, m);
% inizializzo la struttura dati per lo spettro
A_spect = zeros(n, m);

if (sech_flag == 1)
    pulse = sqrt(P0) .* sech(time/T0);
else
    pulse = sqrt(P0) .* exp(-(time/T0).^ 2);
end

A(:, 1) = pulse;

for n = 1:space_steps-1
    % converto nel dominio della frequenza
    A_spect(:, n)    = fft(A(:, n));
    % eseguo il passo lineare nel dominio della frequenza
    A_spect(:, n+1) = A_spect(:, n) .*
                      exp (dz * (1i * beta_2/2 * w.^2 - alpha
                         /2)).';
    % torno nel dominio del tempo
    A(:, n+1)        = ifft(A_spect(:, n+1));
    % eseguo il passo non lineare nel dominio del tempo
    A(:, n+1)        = A(:, n+1) .*
                      exp(1i * dz * gamma .* (abs(A(:, n+1)))
                         .^2);
end
A_spect(:, space_steps) = fft(A(:, space_steps));
```

Si presenta ora un ragionevole modello di costo di esecuzione nel tempo. Nel metodo esposto l'operazione più costosa in macchina è la moltiplicazione tra scalari complessi. Assegneremo costo 1 a una qualsiasi operazione tra scalari complessi, e costo 0 alle altre operazioni da eseguire. Si ricorda che, per lo stesso modello di costo, l'algoritmo FFT ha complessità $\Theta(n \log n)$ dove n è la dimensione dell'array da trasformare, ovvero quello che scandisce il tempo. Tralasciando le operazioni di inizializzazione, l'algoritmo svolge asintoticamente $\Theta(mn \log n)$ operazioni.

Costruiamo anche un modello di costo in memoria: consideriamo come allocazione di costo 1 quella relativa ad uno scalare complesso (che secondo la rappresentazione usata occupa 2 `double` ovvero 2x64 bit). Per la realizzazione descritta prima il costo in memoria, trascurando ancora una volta variabili di inizializzazione e di supporto, sarà $M(n, m) = 2nm$ ovvero $\Theta(nm)$.

3.1.5 Implementazione usata e possibili migliorie

Il metodo è implementato in Matlab, usando dove possibile le routine di operazioni tra matrici ottimizzate offerte dal linguaggio. La gestione della memoria non è cache-friendly a causa delle grandi dimensioni dei dati da processare, ma il parallelismo delle operazioni di moltiplicazione dei vettori può trarre vantaggio da un implementazione che sfrutti istruzioni SIMD, anche se questo richiederebbe un approccio a più basso livello di quello usato.

La criticità maggiore dell'algoritmo è rappresentata dalla grandezza che le tabelle possono assumere facilmente allo scalare della risoluzione spaziale o temporale. In base agli obiettivi prefissati il codice può essere reso meno dispendioso di memoria, ecco alcuni esempi di utilizzo con i relativi costi in memoria:

- Calcolo del solo impulso alla fine della fibra $\rightarrow M(n, m) = 3n + m$ (consideriamo anche i vettori di supporto che sono stati trascurati),
- Calcolo in post-processing dello spettro punto per punto $\rightarrow M(n, m) = nm$,
- Calcolo limitato ad alcune metriche come larghezza dell'impulso, ecc. $\rightarrow M(n, m) = 2n + m$,

Infine, il linguaggio supporta l'integrazione della libreria FFTW come implementazione dell'algoritmo FFT. Questa offre delle ottimizzazioni ad-hoc, ottenute con tecniche di esplorazione e valutazione dei metodi utilizzabili, che permettono di sfruttare caratteristiche specifiche dell'architettura del sistema per velocizzare la computazione [10].

3.2 Fenomeni osservabili con il simulatore

Si presenta in questa sezione l'analisi simulativa, commentando in questa sede due serie di simulazioni. Una prima serie di simulazioni è condotta su scenari perfettamente prevedibili anche analiticamente, per i quali si verificherà che il simulatore fornisca le soluzioni attese, per poi passare ai casi di studio in cui lo strumento del simulatore diventa realmente utile per poter prevedere la propagazione degli impulsi. Qualche ulteriore osservazione teorica permetterà di apprezzare uno dei fenomeni più interessanti che questo simulatore è in grado di evidenziare, ovvero la propagazione di *solitoni*.

3.2.1 Fibra ideale

Si inizia con un caso banale: in questo caso con fibra ideale intendiamo l'assenza di attenuazione, dispersione e non linearità.

Tempo	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
$20ns$	$0.1ps$	$1mW$	$20ps$	gauss.	$50km$	$10m$	$0dB/km$	$0ps^2/km$	$0W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.2: Configurazione per la simulazione con fibra ideale

In questa situazione ideale l'impulso si propaga senza cambiare né intensità né spettro, e mantenendo la fase iniziale di 0. Infatti in assenza di non linearità, dispersione e attenuazione, l'equazione diventa banale

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0, \tag{3.10}$$

una volta specificate le condizioni iniziali la soluzione è un impulso di fatto costante.

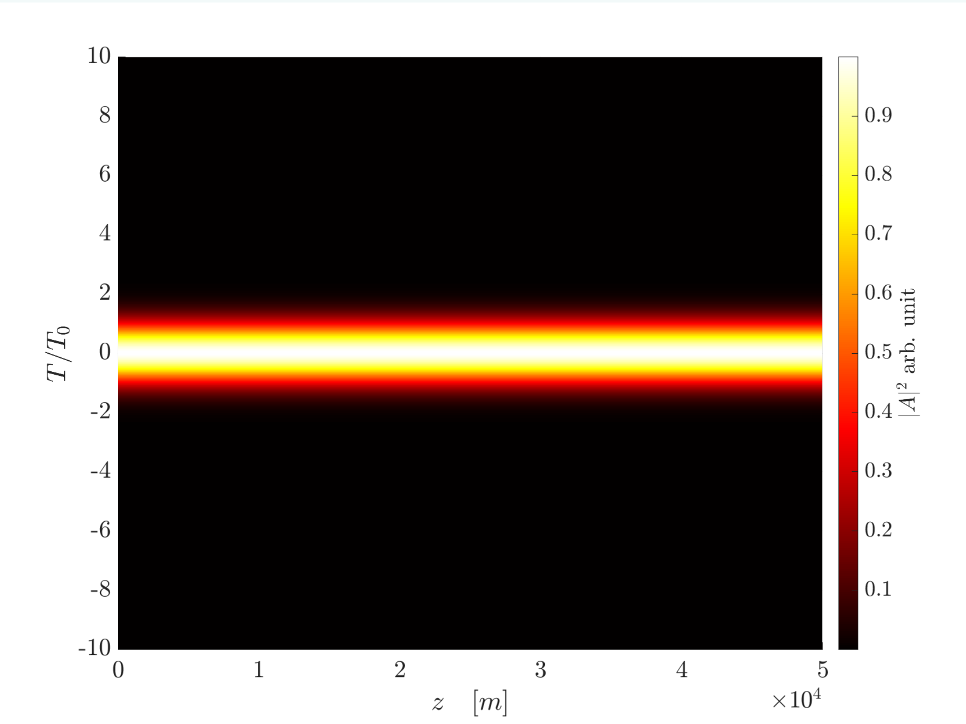

Figura 3.1: Intensità

Osserviamo in questo caso semplice come la sostituzione $T = t - z/v_g$ permette di incorporare e rende l'equazione insensibile alla velocità di gruppo della frequenza ottica della portante. È una semplificazione che permette di evidenziare solamente i fenomeni interessanti che alterano l'impulso.

Si verifica infine che la fase, stabilita inizialmente a 0, non venga alterata, con la figura 3.2 †.

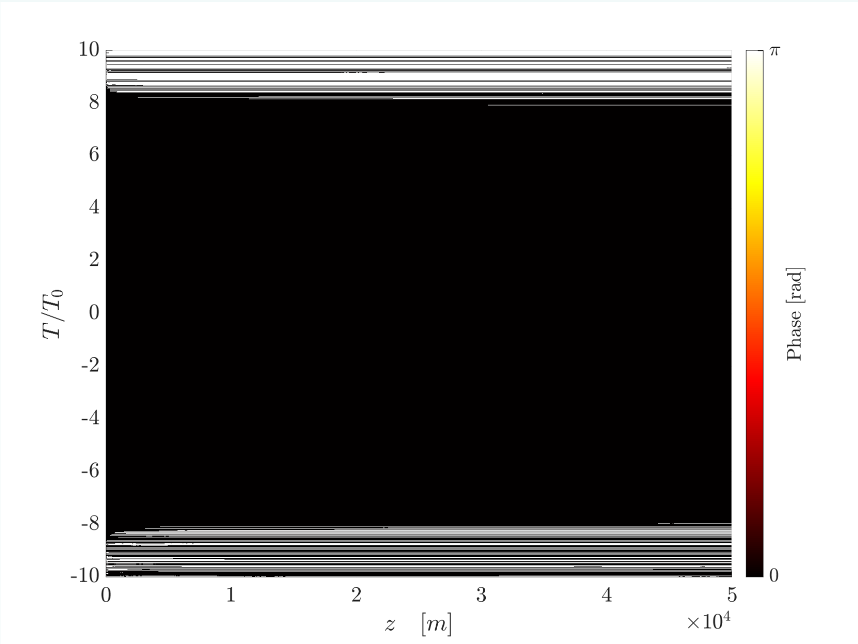

Figura 3.2: Fase

Tutti i risultati saranno presentati con codice colore come in figura 3.1, oppure per profili come in figura 3.3. La prima visualizzazione ha il pregio di fornire una descrizione passo per passo dell'evoluzione spaziale, mentre la seconda permette di valutare con maggior dettaglio la forma d'onda dell'impulso.

† In figura 3.2 notiamo quelli che sembrano degli artefatti numerici nel grafico della fase: in effetti il rumore presente è dovuto alle imprecisioni numeriche delle conversioni FFT e IFFT. Nei punti in cui il modulo è particolarmente piccolo, e solo in questi, le conversioni fanno in modo che la fase passi da 0 a π e viceversa. Simili artefatti sono presenti anche nei successivi grafici di fase, e possono essere trascurati.

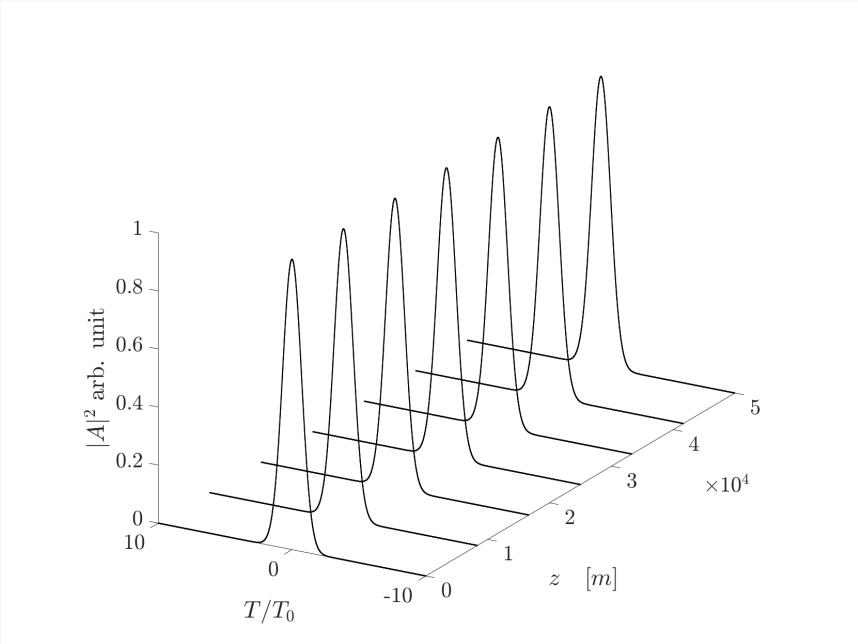

Figura 3.3: Intensità

3.2.2 Effetti dell'attenuazione ($\alpha \neq 0$)

Si studiano ora uno alla volta i fenomeni che rappresentano le non idealità, innanzitutto analizzando il del comportamento in una fibra con attenuazione non nulla.

Tempo	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
$20ns$	$0.1ps$	$1mW$	$20ps$	gauss.	$50km$	$10m$	$0.2dB/km$	$0ps^2/km$	$0W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.3: Configurazione per la simulazione della sola attenuazione

Anche in questo caso l'equazione si presenta risolvibile analiticamente

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2} A \qquad \Rightarrow \qquad A(z,T) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2} z\right) A(0,T). \tag{3.11}$$

Usando questa soluzione possiamo dedurre che, con un'attenuazione di $\alpha = 0.2dB/km$, ci aspettiamo che l'intensità dell'impulso si dimezzi ($-3dB$) alla distanza di $15km$, e sia ridotta di $10dB$ a $50km$.

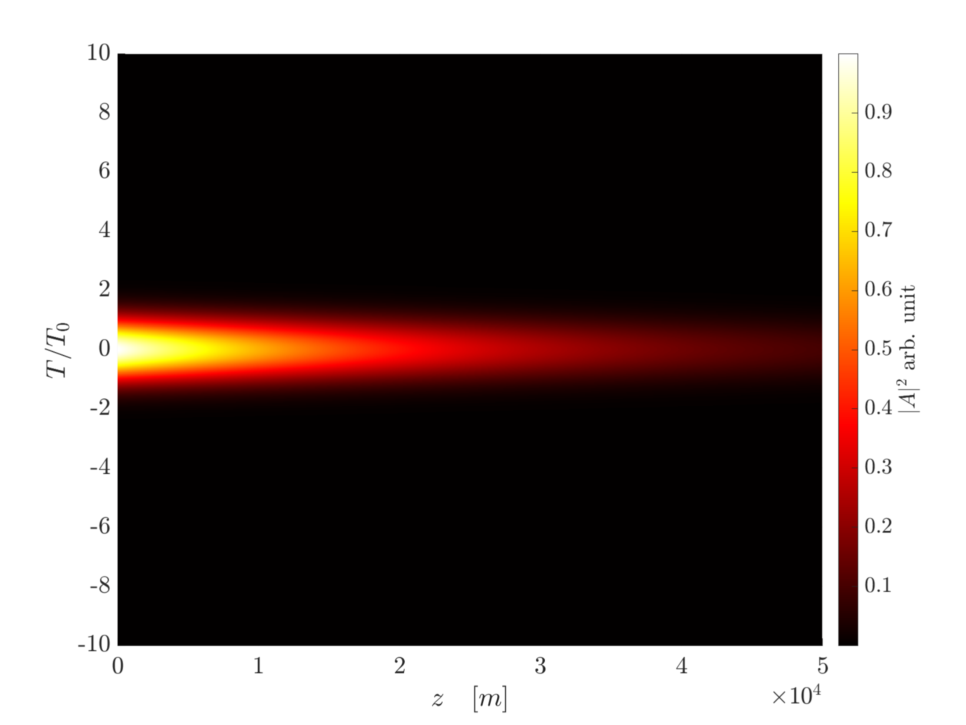

Figura 3.4: Intensità

Le figure 3.4 e 3.5 confermano le considerazioni appena fatte. Nelle prossime simulazioni si annulla invece il termine di attenuazione, per osservare gli effetti di GVD ed SPM isolate.

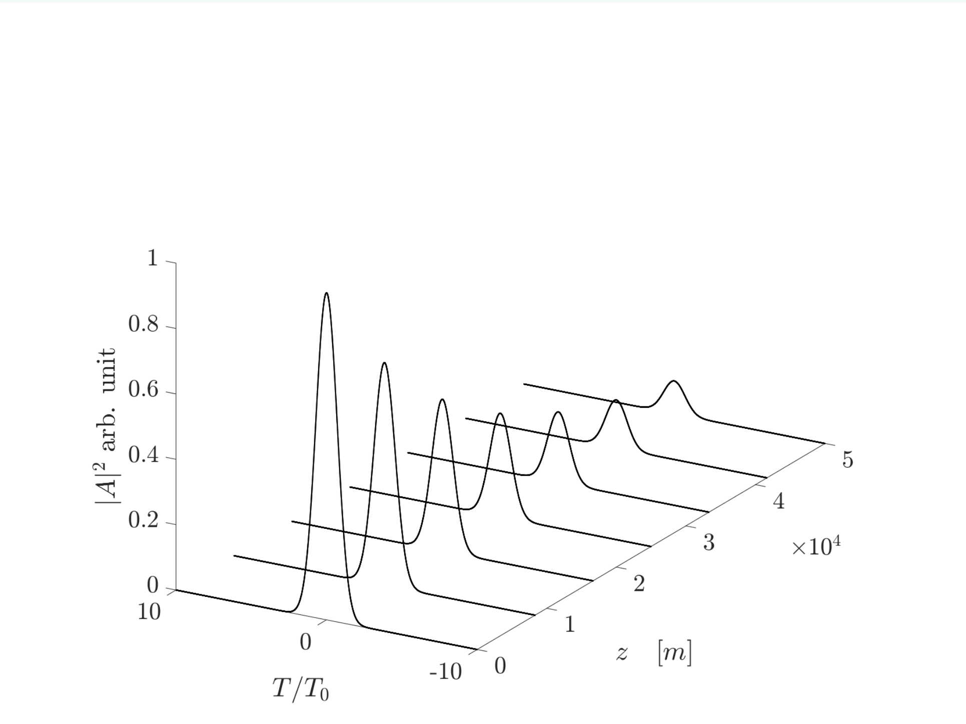

Figura 3.5: Intensità

3.2.3 Effetti della GVD ($\beta_2 \neq 0$)

Annullando l'attenuazione ci si focalizza ora sul fenomeno di allargamento dell'impulso causato dalla dispersione.

Tempo	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
$20ns$	$0.1ps$	$1mW$	$20ps$	gauss.	$77.5km$	$10m$	$0dB/km$	$20ps^2/km$	$0W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.4: Configurazione per la simulazione della sola GVD

Il fatto che anche questa situazione sia analizzabile analiticamente pone nelle condizioni di poter confrontare l'allargamento simulato dell'impulso con un'espressione analitica fornita dall'integrazione [1, p. 67]. Nel dominio della frequenza l'equazione 2.16 si risolve

$$\widetilde{U}(z,\omega) = \widetilde{U}(0,\omega) \exp\left[i\frac{\beta_2}{2}\omega^2 z\right] \tag{3.12}$$

Per un impulso iniziale Gaussiano $U(0,T) = \exp\left[-T^2/(2T_0^2)\right]$ si trova nel punto z della fibra un impulso dato dall'antitrasformata della 3.12

$$U(z,T) = \frac{T_0}{(T_0^2 - i\beta_2 z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)}\right], \tag{3.13}$$

si osserva che il la forma dell'impulso, ovvero il modulo $|U(z,T)|$ vale

$$|U(z,T)| = \frac{T_0}{(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{T^2 T_0^2}{T_0^4 + \beta_2^2 z^2}\right],$$

ricordando $L_D = T_0^2/|\beta_2|$ si riformula

$$|U(z,T)| = \frac{1}{(1 + (z/L_D)^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{T^2}{2T_0^2}\frac{1}{1 + (z/L_D)^2}\right].$$

Si nota che, fissata una certa posizione z, l'impulso ha forma Gaussiana poiché la sua intensità dipende da T solamente tramite il termine

$$\exp\left[-\frac{T^2}{2T_0^2}\frac{1}{1 + (z/L_D)^2}\right],$$

quindi si deduce la durata dalla definizione

$$\frac{T_1(z)}{T_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2} \tag{3.14}$$

Nella simulazione si è scelta una lunghezza pari a $\sqrt{15}$ lunghezze di dispersione in modo che il fattore di allargamento dell'impulso sia pari a 4 alla distanza finale.

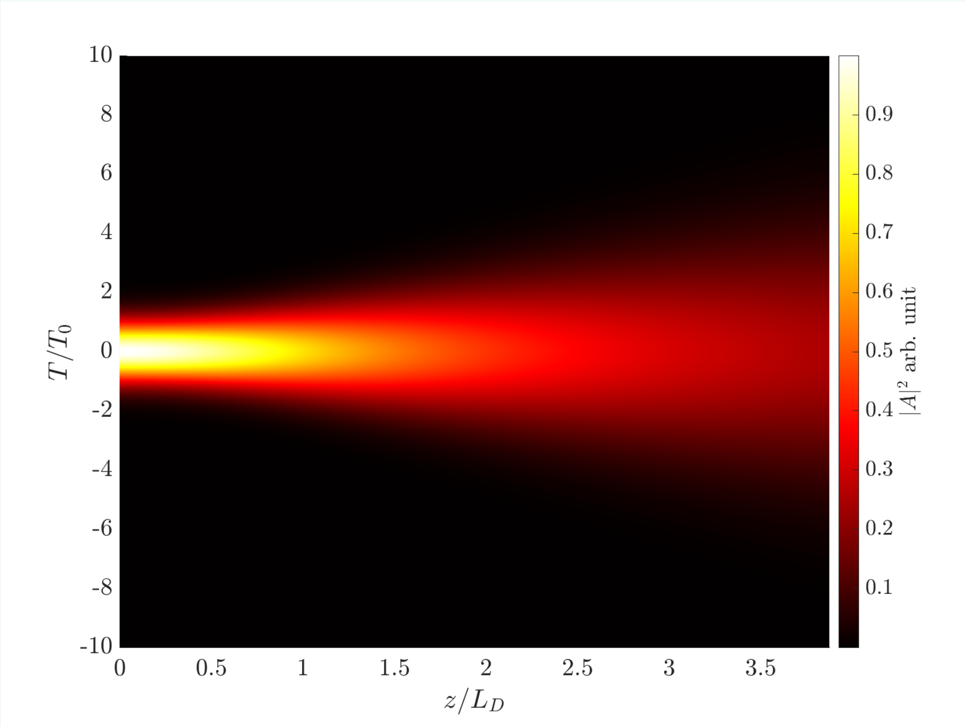

Figura 3.6: Intensità

Si noti che lo spettro rimane imperturbato.

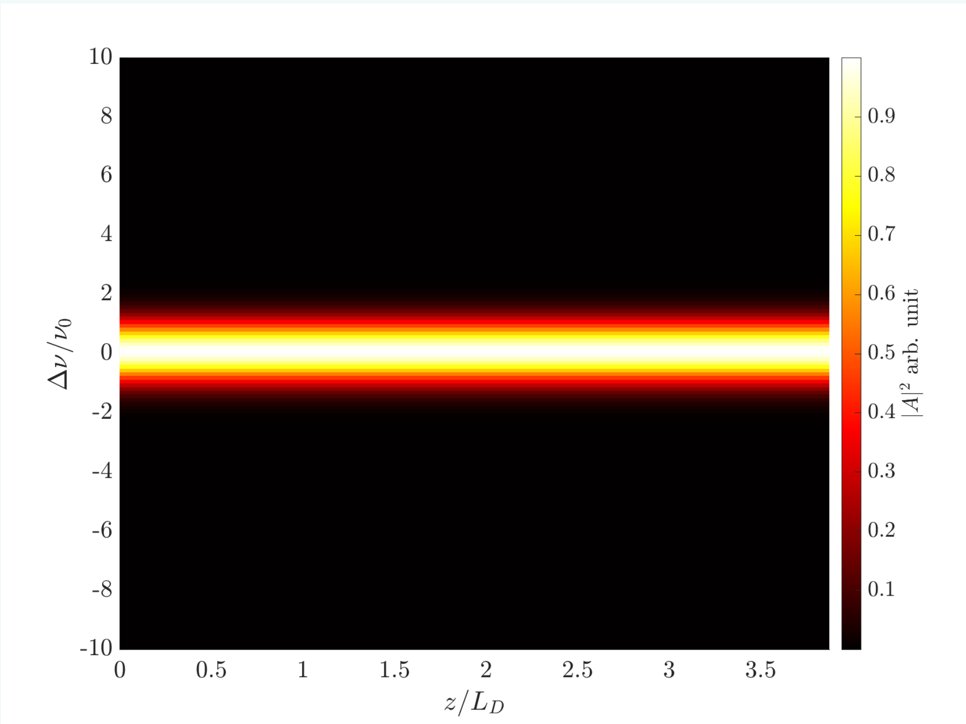

Figura 3.7: Spettro

Si ricava dalla simulazione una misura più precisa dell'effettivo allargamento dell'impulso, usando la definizione di T_0, e si ottiene il seguente grafico che mostra perfetto accordo con le previsioni teoriche.

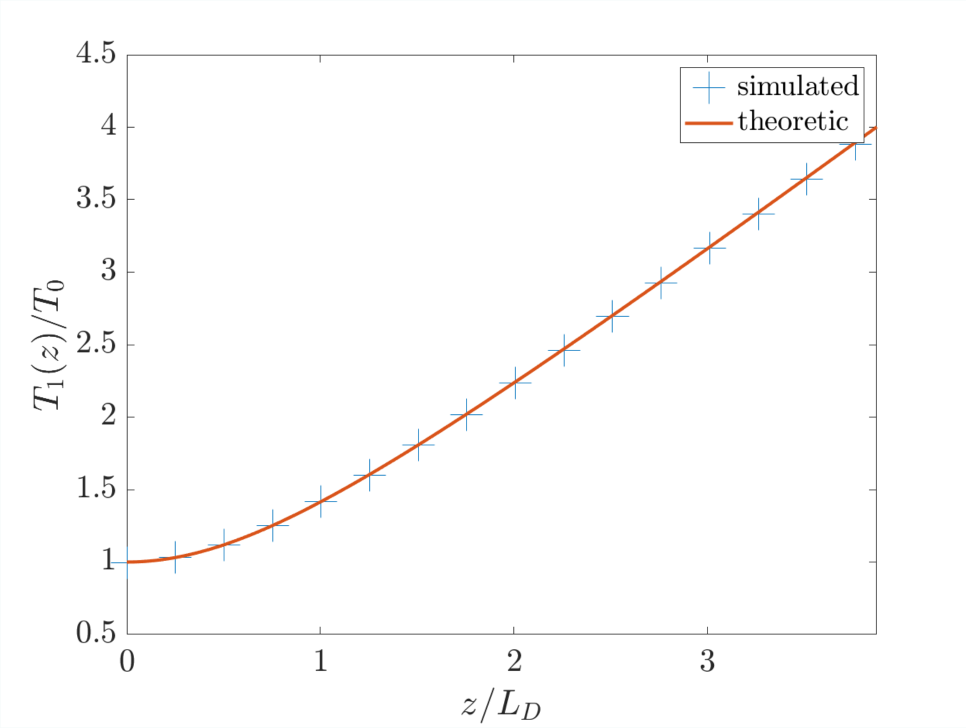

Figura 3.8: Fattore di allargamento simulato, confrontato con quello teorico: le due linee si sovrappongono

La visualizzazione per profili illustra il processo di dispersione cromatica in modo molto evidente.

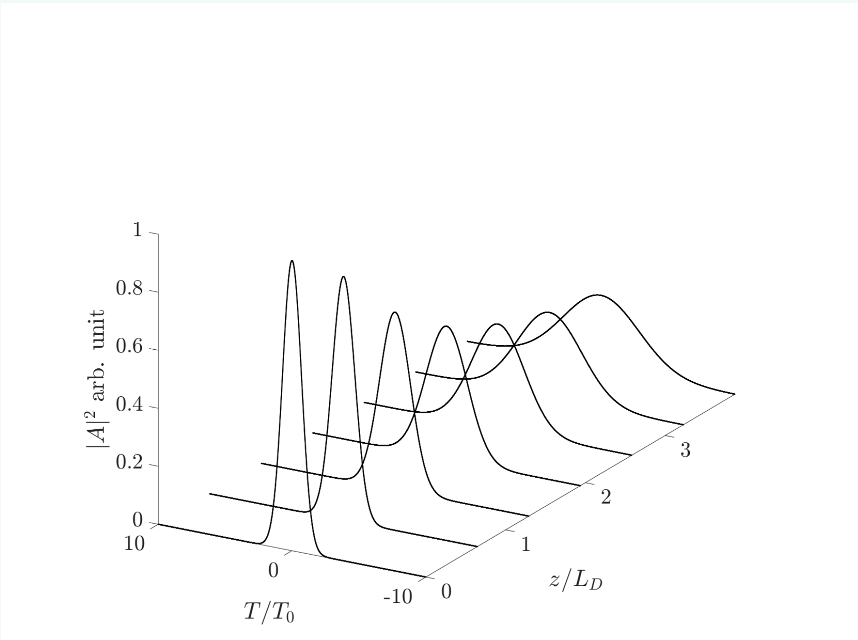

Figura 3.9: Intensità

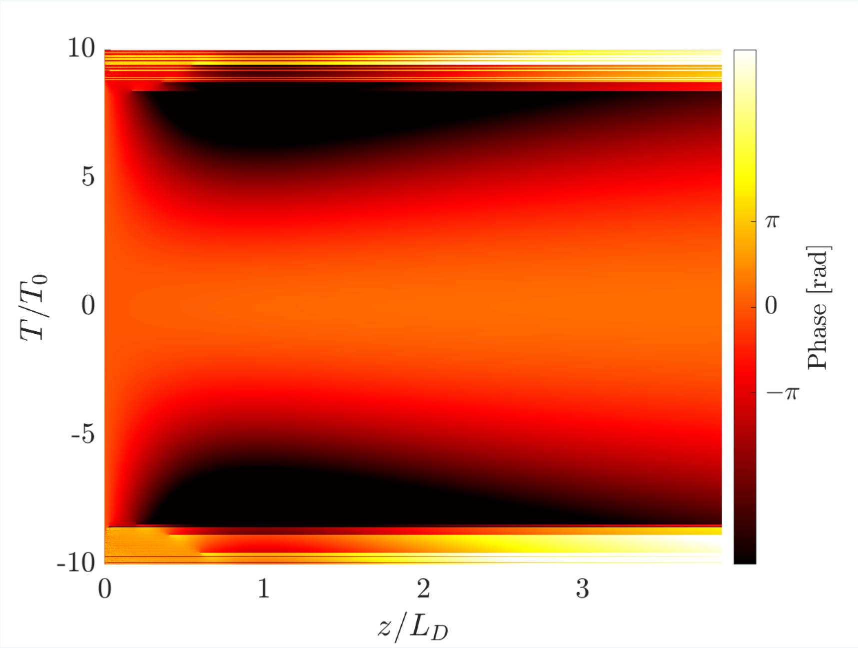

Figura 3.10: Fase (nota † p. 29)

Indice di GVD negativo

Nella precedente simulazione si è analizzato il caso in cui $\beta_2 > 0$, tuttavia, in alcune condizioni di impiego, le fibre possono anche presentare indici $\beta_2 < 0$. Si osserva però che l'equazione 3.14 non ha alcuna dipendenza dal segno di β_2, poiché $L_D = T_0^2/|\beta_2|$. Quindi l'allargamento dell'impulso per due fibre con coefficienti di GVD opposti è identico. Simulando la stessa situazione descritta in tabella 3.4, ma con β_2 sostituito dal suo opposto, si ottiene per l'ampiezza la medesima figura ottenuta in precedenza (3.6), esattamente come atteso. L'aspetto che si differenzia rispetto alla simulazione con $\beta_2 > 0$ è invece la fase, infatti, trascrivendo il contributo dell'esponenziale nell'equazione 3.13

$$\exp\left[-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{T^2}{T_0^4 + \beta_2^2 z^2}(T_0^2 + \underbrace{i\beta_2 z})\right]$$

si nota come la parte immaginaria dell'esponente (che determina la variazione di fase) dipenda dal segno di β_2.

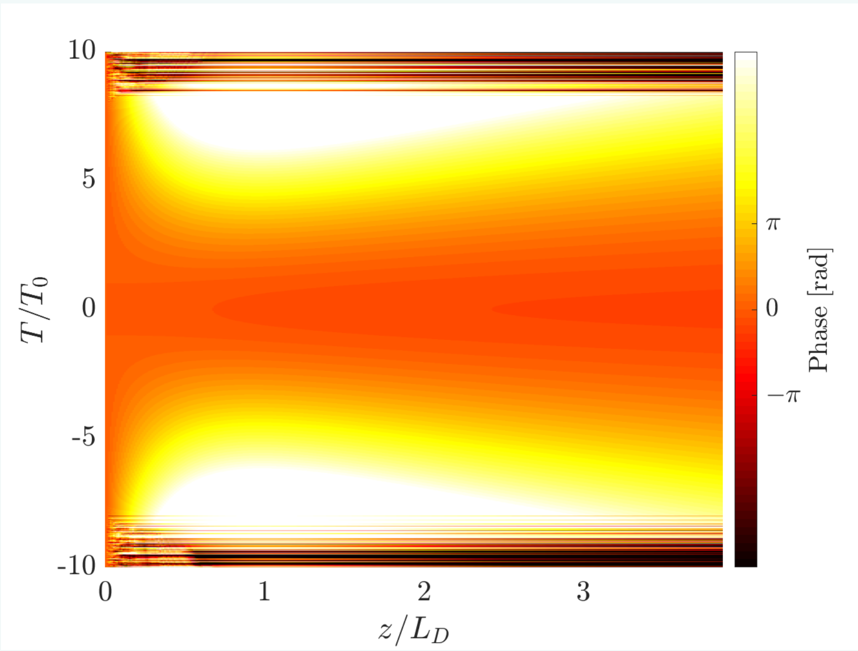

Figura 3.11: Fase (nota † p. 29)

Sebbene l'effetto di allargamento dell'impulso non sia variato rispetto al caso $\beta_2 > 0$, in questo caso è fondamentalmente differente poiché, nonostante la simulazione non sia in grado di mostrarlo, le componenti a velocità di gruppo maggiore nel caso $\beta_2 > 0$ sono quelle a *frequenza più bassa*, mentre il contrario avviene quando $\beta_2 < 0$. Questo fenomeno è alla base di un'importante principio di applicazione detto *compensazione* della dispersione.

Compensazione della dispersione

La possibilità di avere fibre con coefficienti β_2 di segno sia positivo che negativo abilita la realizzazione di sistemi in cui gli effetti della GVD vengono compensati, ovvero sistemi in cui la propagazione dell'impulso non risente affatto della dispersione della velocità di gruppo. Questo può risultare controintuitivo, dato che con entrambi i segni del coefficiente di GVD ci si aspetta un allargamento dell'impulso, ma considerando quanto detto sulla diversa composizione spettrale degli impulsi allargati nei due casi, è facile rendersi conto che nei due casi gli effetti sono in realtà opposti e possono elidersi a vicenda. Infatti, quantificando questa considerazione, si ipotizzi di congiungere due fibre, la prima di lunghezza L' e indice di GVD β_2' e la seconda di lunghezza L'' e indice di GVD β_2''. Riscrivendo la 3.12 per esprimere l'ampiezza in uscita dalle fibre in serie

$$\widetilde{U}(L'+L'',\omega) = \widetilde{U}(0,\omega)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\beta_2'L' + \beta_2''L''\right)\omega^2\right],$$

si deduce quindi che nel caso in cui $\beta_2'L' + \beta_2''L'' = 0$ si ha $\widetilde{U}(L'+L'',\omega) = \widetilde{U}(0,\omega)$. Questo caso è ottenibile solamente quando si hanno parametri di GVD di segno opposto, più precisamente quando

$$\beta_2'' = -\beta_2'\frac{L'}{L''}.$$

Si osserva al simulatore questo effetto, usando il medesimo scenario descritto in tabella 3.4, in cui, dopo $77500m$ della fibra con $\beta_2' = 20ps^2/km$, l'impulso attraversa altri $77500 \cdot 0.3 = 23250m$ di fibra con $\beta_2'' = -20 \cdot 3.34 = -66.7ps^2/km$.

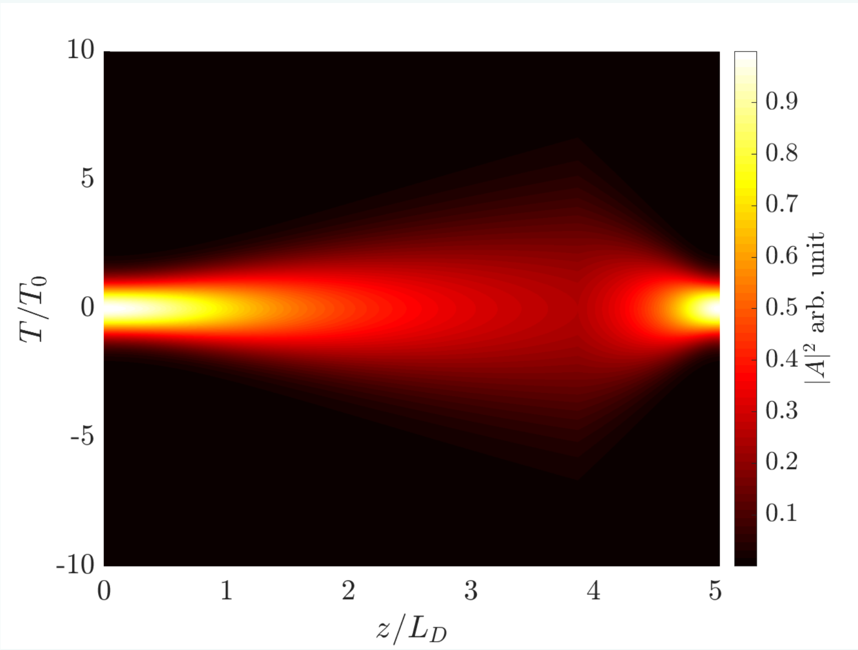

Figura 3.12: Intensità

Visualizzando l'intensità si nota esattamente come dopo circa 3/4 del percorso l'effetto della dispersione "retrocede" fino a rendere l'impulso in uscita di forma pari a quella in ingresso.

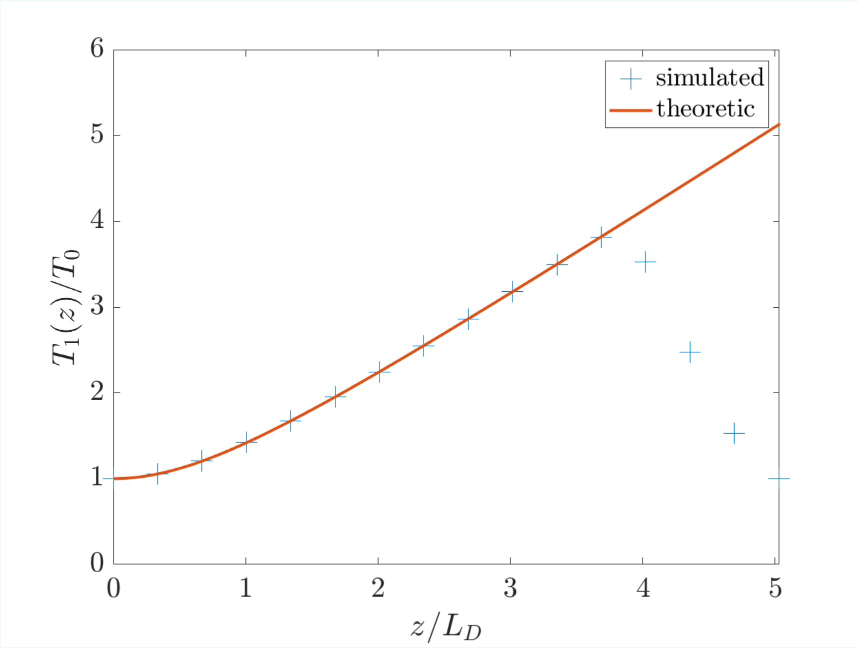

Figura 3.13: Fattore di allargamento simulato, confrontato con quello (teorico) di un collegamento interamente realizzato con la prima fibra

In figura 3.13 invece si osserva il coefficiente di allargamento allargamento che torna ad 1 in uscita alla fibra, confrontato con quello che il sistema avrebbe avuto se fosse stato realizzato interamente con la prima fibra.

3.2.4 Effetti della SPM ($\gamma \neq 0$)

Si analizza ora il fenomeno più interessante, che di fatto abilita, assieme alla GVD, la propagazione a solitoni.

Tempo	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
$20ns$	$0.1ps$	$100mW$	$20ps$	gauss.	$27km$	$10m$	$0dB/km$	$0ps^2/km$	$3W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.5: Configurazione per la simulazione di sola SPM

In questo caso l'equazione 3.1 diventa

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma|A|^2 A, \tag{3.15}$$

moltiplicando per A^* entrambi i membri e sommando l'espressione risultante con il suo complesso coniugato si ottiene

$$A^*\frac{\partial A}{\partial z} + A\frac{\partial A^*}{\partial z} = \frac{\partial A^* A}{\partial z} = \frac{\partial |A|^2}{\partial z} = i\gamma|A|^2 A^* A - i\gamma|A^*|^2 AA^* = 0,$$

si può affermare quindi che la SPM non ha effetti sull'ampiezza. Questo permette di riscrivere la 3.15 in una forma facilmente integrabile, osservando che $|A(z,T)|^2 = |A(0,T)|^2 = P_0(T)$

$$\frac{\partial A(z,T)}{\partial z} = i\gamma P_0(T) A(z,T),$$

da cui si ottiene

$$A(z,T) = A(0,T)\exp\left[i\gamma P_0(T)z\right],$$

quindi si ha una modulazione di fase proporzionale all'intensità dell'impulso iniziale ed al coefficiente γ: si definisce $\phi(z,T) = \gamma P_0(T)z$. Se un impulso Gaussiano si propaga in una fibra di lunghezza L in assenza di attenuazione, la modulazione assume valore massimo in $T = 0$, dove $P_0(T) = P_0$, e vale $\phi_{max} = \gamma P_0 L$.
È possibile stimare l'allargamento spettrale di un tale impulso, poiché vale

$$\delta f = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial T}$$

e nel caso di un impulso gaussiano la stima della variazione massima di frequenza è la seguente [1, p. 101]:

$$\delta f_{max} = 0.1369\frac{\phi_{max}}{T_0} \tag{3.16}$$

Dato che nella simulazione la banda iniziale (al punto di intensità $1/e$) è di $\Delta f_0 = \frac{1}{2\pi T_0} = 7.95GHz$, ci si aspetta dal ragionamento precedente una larghezza di banda finale di $\Delta f_1 = \Delta f_0 + \delta f_{max} = 63.4GHz$ ovvero un allargamento di circa un fattore 8.

Notiamo innanzitutto il comportamento chiave, la modulazione di fase: nelle parti dell'impulso a intensità più elevata si verifica chiaramente una variazione della fase.

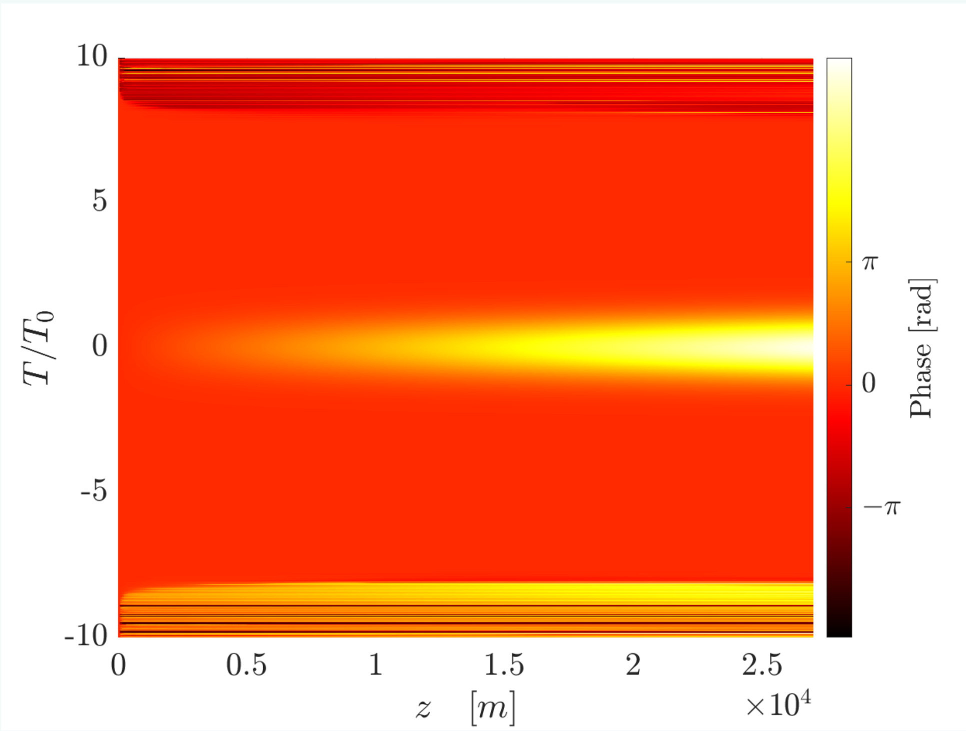

Figura 3.14: Fase (nota † p. 29)

La conseguenza di questo fenomeno, come esposto, è un allargamento di spettro: osserviamo una particolare evoluzione mano a mano che l'impulso procede.

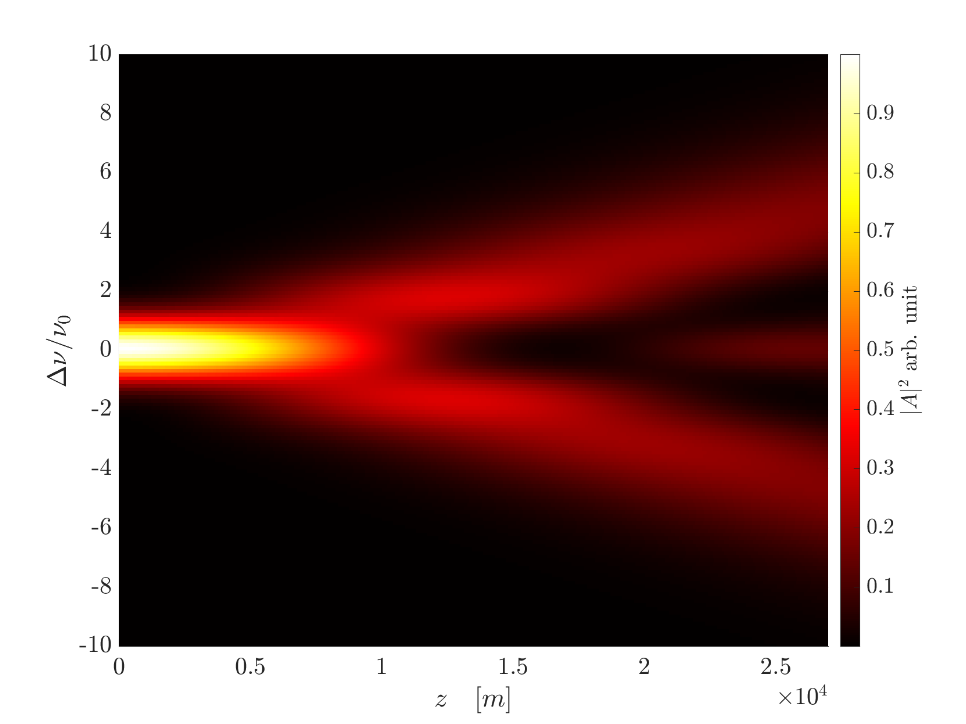

Figura 3.15: Spettro

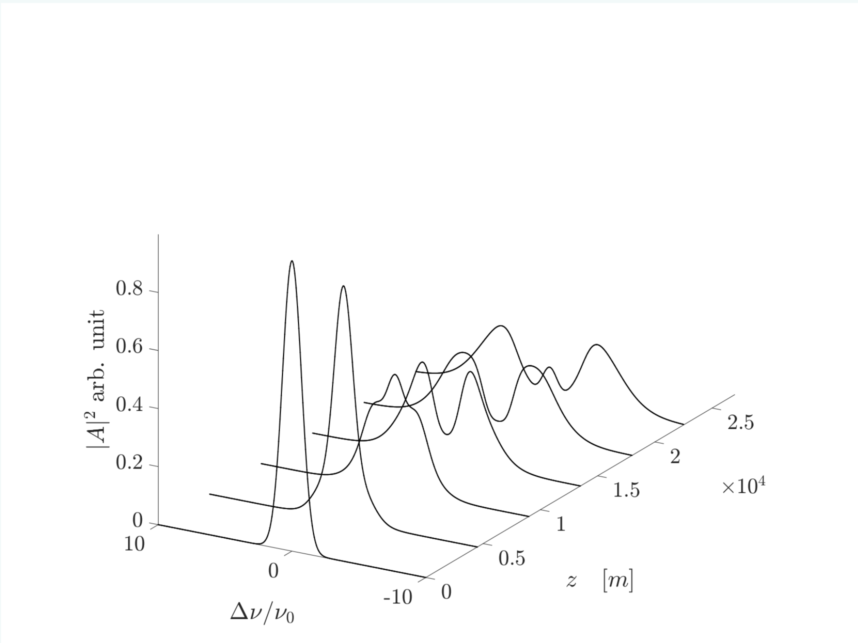

Figura 3.16: Spettro

Per confrontare la simulazione con le previsioni teoriche, si presenta in figura 3.17 il grafico dello spettro in uscita dalla fibra, in cui è facilmente visibile l'allargamento effettivo, che conferma l'efficacia del simulatore rispetto agli argomenti teorici.

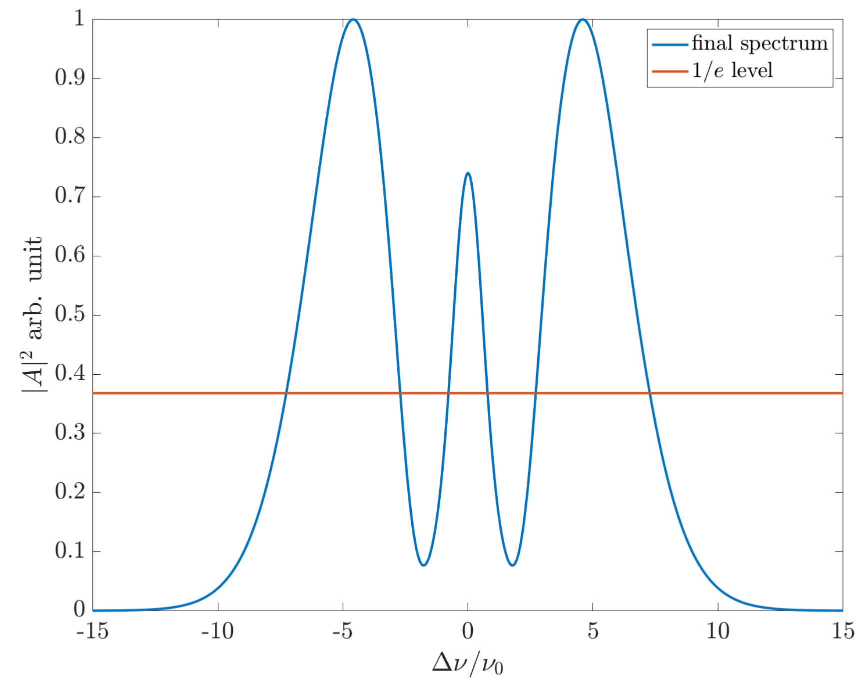

Figura 3.17: Spettro in uscita

Infine, si verifica che l'ampiezza non viene alterata da questo fenomeno. Infatti la SPM agisce sull'ampiezza solamente quando è compresente la GVD.

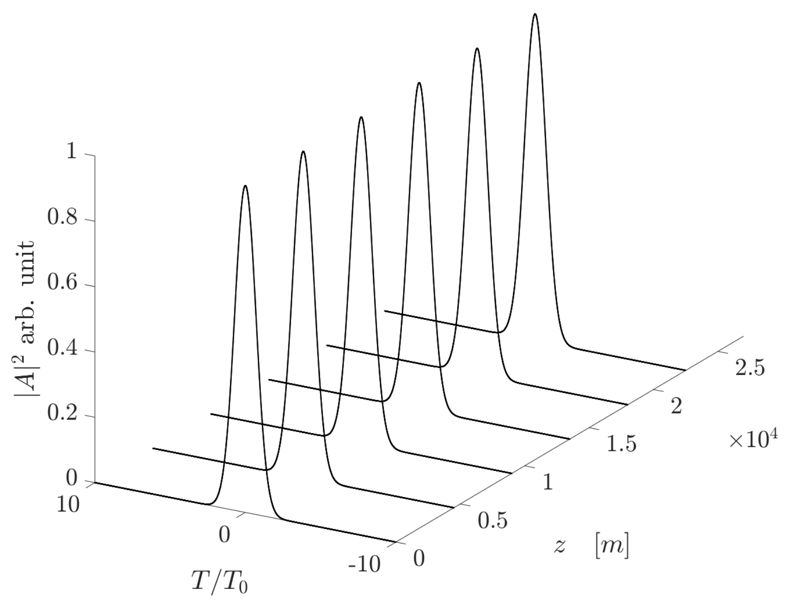

Figura 3.18: Intensità

3.2.5 Effetto combinato: propagazione di solitoni

La coesistenza di effetti dispersivi e non lineari fa sì che si possa formare una particolare configurazione di propagazione. Questo tipo di comportamento è stato studiato a partire dal 1834, anno in cui il fisico inglese John Scott Russell osservò per la prima volta un'onda in un canale che avanzava senza cambiare la sua forma, nonostante la dispersione. Il primo nome per questo fenomeno, assegnato proprio da Russell, fu quello di *onda di traslazione*. Successivamente l'analisi del fenomeno condusse alla formulazione di equazioni che supportano soluzioni di questo tipo, come l'equazione KdV (Korteweg e de Vries), e anche la NLSE [13]. Si può osservare che il termine *solitone* contiene il suffisso *-one* che sta a suggerire il comportamento particellare dell'impulso, come nei casi di *fotone, fonone, elettrone, nucleone, ecc.* Questo specifica che l'interazione tra solitoni propriamente detti non varia la loro forma.

Nel caso delle fibre ottiche, un'osservazione chiave è che l'equazione che abbiamo analizzato cambia di carattere se consideriamo una dispersione anomala ($\beta_2 < 0$). Una comprensione matematicamente profonda del fenomeno passa per il metodo di *inverse scattering*, che tuttavia si avvale di considerazioni che vanno al di là della portata di questo elaborato. Un aspetto chiave evidenziato dal metodo è che i solitoni si presentano a famiglie, dette ordini (per ogni ordine l'equazione supporta uno spazio di soluzioni scandito da alcuni parametri), ed evidenziano periodicità spaziali. L'attenzione di questa analisi è rivolta ad un solitone del primo ordine (chiamato anche fondamentale), semplice da studiare ma significativo. Per ricavare una sua forma chiusa eviteremo il metodo di inverse scattering e sfrutteremo un metodo ad-hoc con una semplice sostituzione.

Solitone fondamentale

Si usa l'equazione NLS in forma canonica ricavata in precedenza, 2.18 (in assenza di attenuazione), e si suppone che la soluzione abbia un inviluppo costante nello spazio, ma fase variabile

$$u(\xi, \tau) = V(\tau)\exp[i\phi(\xi, \tau)], \tag{3.17}$$

sostituendo questa forma fissata nell'equazione otteniamo due vincoli rispettivamente per le funzioni V e ϕ che dopo una prima elaborazione si presentano in questa forma

$$\phi = K\xi, \qquad \text{dove } K \text{ è una costante,}$$
$$\left(\frac{dV}{d\tau}\right)^2 = 2KV^2 - V^4 + c.$$

sfruttando le condizioni al contorno per l'impulso (nullo per tempi normalizzati alti), e imponendo $V(0) = 1$ e $dV/d\tau(0) = 0$ nel picco dell'impulso, risulta $V(\tau) = \mathrm{sech}(\tau)$ e $\phi(\xi, \tau) = 1/2\xi$, per cui otteniamo

$$u(\xi, \tau) = \mathrm{sech}(\tau)\exp[i\xi/2]$$

che è quindi la forma del solitone fondamentale.

Ricordando la sostituzione $u = NU$, si può dare senso fisico a questo notevole risultato: nel caso $N = 1$, ovvero quando

$$N = \sqrt{\frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|}} = 1$$

l'impulso si propagherà indefinitamente mantenendo un inviluppo di forma costante. In genere si preferisce esplicitare la condizione scritta sopra in termini di potenza lanciata in ingresso, perciò

$$P_0 = \frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2}$$

Si impostano quindi esattamente queste condizioni nella successiva simulazione:

Tempo	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
$20ns$	$0.1ps$	$3.4mW$	$20ps$	sech.	$270km$	$100m$	$0dB/km$	$-4ps^2/km$	$3W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.6: Configurazione per la simulazione di un solitone fondamentale

Con un impulso iniziale a secante iperbolica, ci si aspetta allora che la compensazione degli effetti di GVD ed SPM sulla fase faccia sì che questa avanzi in modo omogeneo e costante. L'impulso si dovrà propagare senza alterazioni in intensità e spettro.

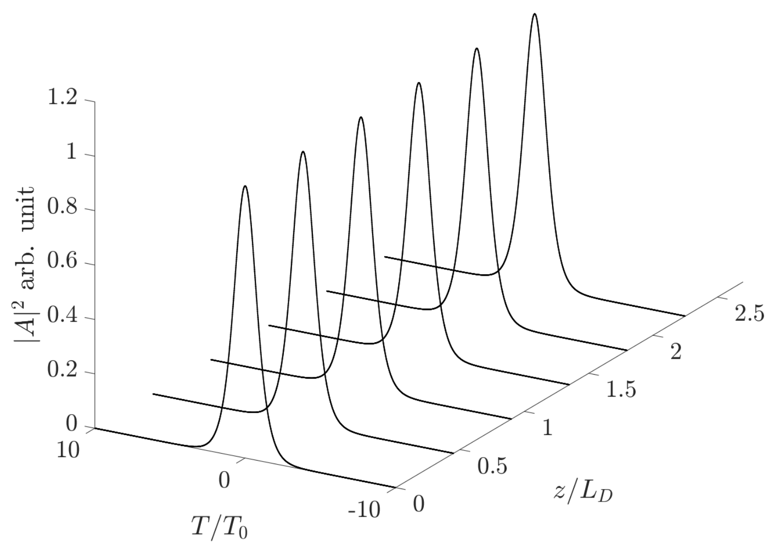

Figura 3.19: Intensità

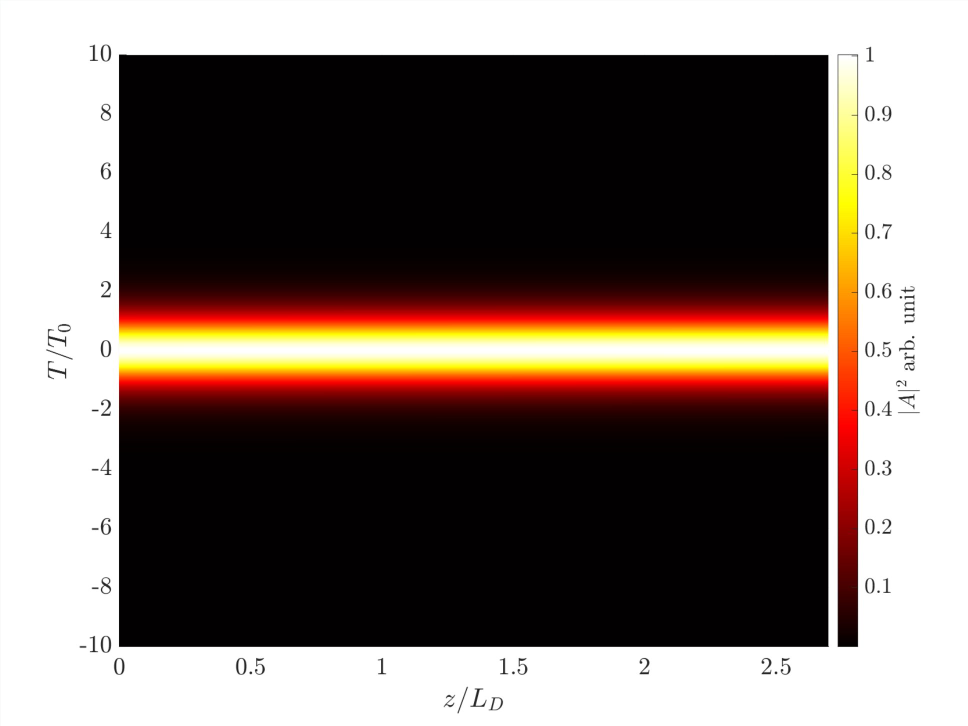

Figura 3.20: Intensità

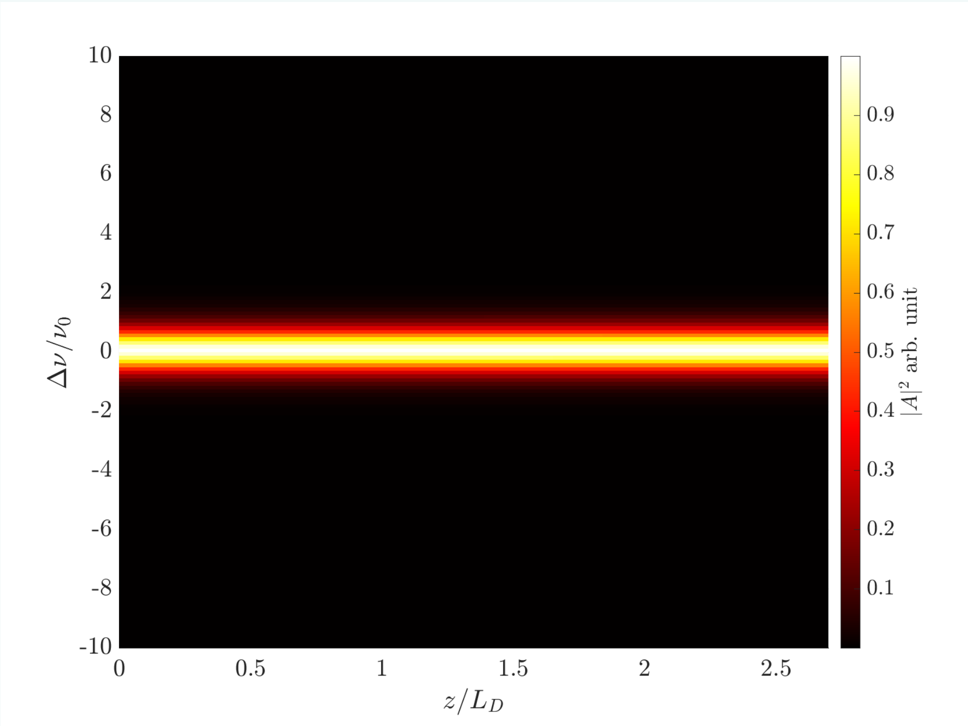

Figura 3.21: Spettro

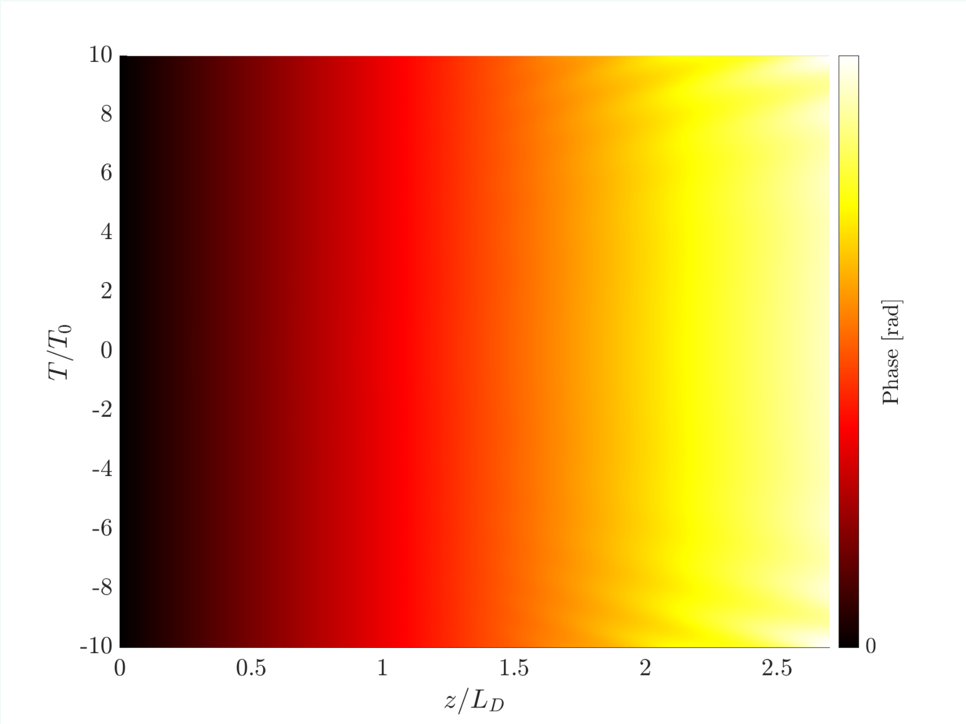

Figura 3.22: Fase

3.2.6 Collisione di due solitoni fondamentali

Una propagazione come quella descritta nel paragrafo precedente è molto desiderabile per un sistema di trasmissione: infatti grazie alla loro interazione reciproca, gli effetti di disturbo dovuti ad i fenomeni di GVD ed SPM sono eliminati. Si ipotizza ora un utilizzo reale di questa configurazione: chiaramente non ha nessun interesse far propagare un solitone singolo ai fini della comunicazione, bensì l'obiettivo è lanciare nella fibra una serie di solitoni opportunamente modulati. Il bit rate del collegamento è inversamente proporzionale al minimo tempo che intercorre tra un picco di un'onda a secante iperbolica ed il successivo. Dato che la forma d'onda in ingresso non è limitata nel tempo ci si aspetta una sovrapposizione delle code degli impulsi. Il metodo di scattering inverso caratterizza l'onda che si propaga come un solitone del primo ordine in termini di un'onda a secante iperbolica *singola*. È ragionevole quindi chiedersi se anche nel caso di una rapida successione di impulsi la loro propagazione assuma il carattere della successione dei rispettivi solitoni. Con la prossima simulazione, usando una coppia di impulsi spaziati tra loro di $6T_0$, si osserva che non è così, infatti la dinamica della propagazione presenta delle complicazioni, poiché gli impulsi vanno a collidere mano a mano che si propagano, per poi distanziarsi nuovamente. I parametri utilizzati sono riassunti nella seguente tabella

Tempo	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
$20ns$	$0.1ps$	$3.4mW$	$20ps$	sech.	$270km$	$100m$	$0dB/km$	$-4ps^2/km$	$3W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.7: Configurazione per la simulazione della collisione di due solitoni fondamentali

In figura 3.23 si nota come, dopo un breve tratto in cui la propagazione è simile a quella di due solitoni, gli impulsi si avvicinano e collidono, per poi ripristinare la loro propagazione precedente.

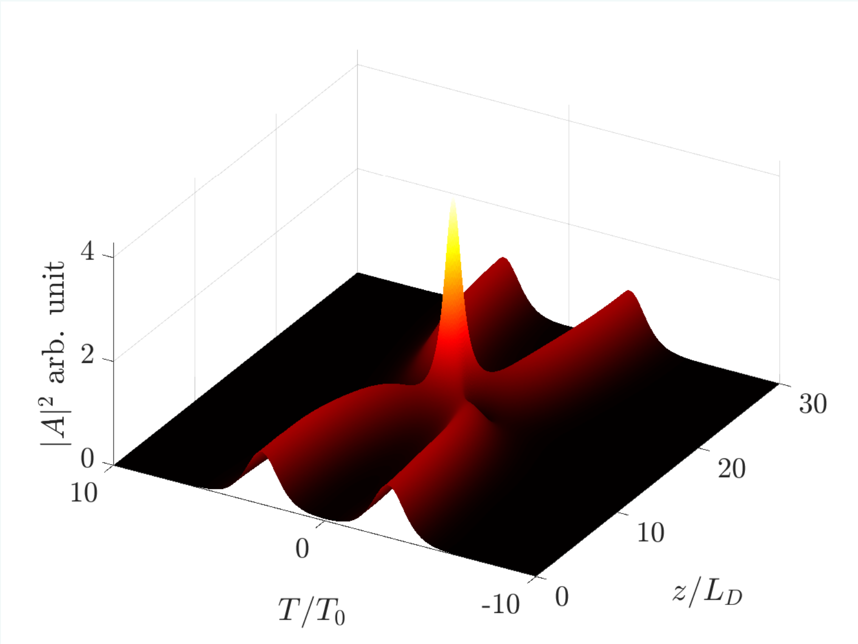

Figura 3.23: Collisione di due solitoni fondamentali separati da $6T_0$, intensità totale

Calcolando la distanza tra gli impulsi in funzione della posizione normalizzata z/L_D si ottiene il grafico 3.24.

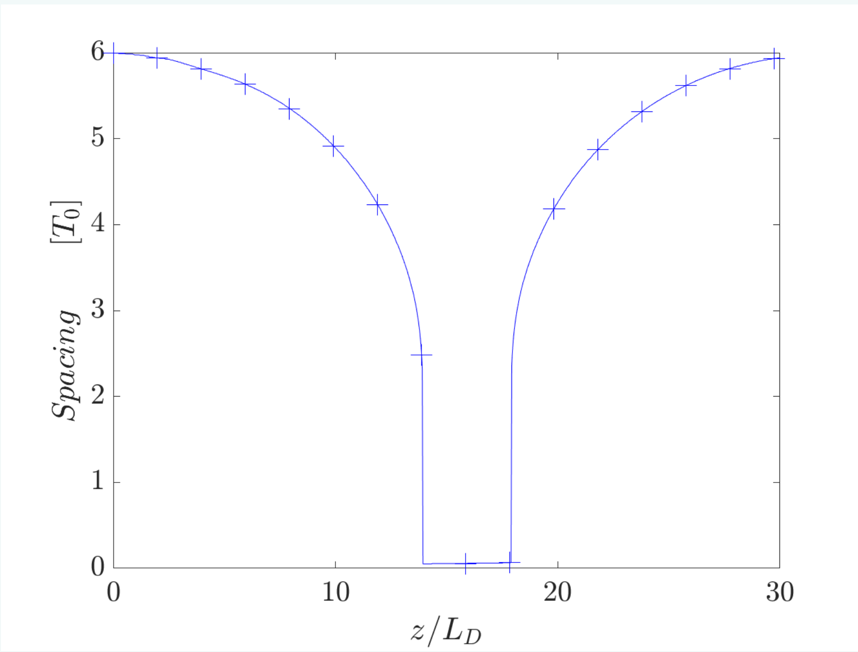

Figura 3.24: Differenza tra i picchi degli impulsi, in unità di T_0

Nella prospettiva di un utilizzo della propagazione di solitoni per un sistema di trasmissione questo fenomeno porta ad una dinamica molto diversa da quella attesa, e i suoi effetti sono tanto più intensi quanto più gli impulsi iniziali sono ravvicinati relativamente alla loro larghezza.

3.3 Simulazione in un caso realistico

Per testare le capacità del simulatore nel prevedere il comportamento di fibre reali si definiscono due scenari a partire dai dati analizzati in [15]: in particolare si considerano due fibre caratterizzate da coefficienti di non linearità molto diversi, il modello SMF-28 del produttore Corning e una fibra HNLF (Highly Nonlinear Fiber) del distributore Draka. I dati delle fibre, come ricavati dall'articolo, sono esposti in tabella 3.8(considerando una portante a $\lambda_0 = 1555nm$)

	SMF-28	HNLF
α $[db/km]$	0.18	0.81
β_2 $[ps^2/km]]$	-21.6	-7.09
γ $[W^{-1}km^{-1}]$	0.78	10.68

Tabella 3.8: Caratteristiche delle fibre misurate in [15]

Si scelgono le lunghezze in modo che l'attenuazione complessiva sia uguale nelle due fibre: $L_{SMF} = 55.5km, L_{HNLF} = 12.3km$. Si lanciano nelle due fibre degli impulsi di larghezza tale che $L_D = 20$, quindi $T_{0SMF} = 7.75ps, T_{0HNLF} = 2.09ps$, e si confronta la propagazione nelle fibre a diversi livelli di potenza. Si sfrutta il fatto che il coefficiente di dispersione sia negativo per eccitare la propagazione di un solitone del primo ordine, con l'obiettivo di osservare entrambe le fibre alla potenza in cui prima $N_{SMF} = 1$ e poi $N_{HNLF} = 1$ (per HNLF tale potenza sarà più bassa chiaramente).

I valori dei parametri sono riassunti nelle tabelle 3.9 3.10

1	*Tempo*	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
SMF-28	$20ns$	$0.1ps$	$460mW$	$7.75ps$	sech	$55.5km$	$10m$	$0.18dB/km$	$-21.58ps^2/km$	$0.78W^{-1}km^{-1}$
HNLF	$20ns$	$0.1ps$	$460mW$	$2.09ps$	sech	$12.3km$	$10m$	$0.81dB/km$	$-7.09ps^2/km$	$10.68W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.9: Configurazione per eccitare la propagazione di un solitone nella fibra SMF-28 (**scenario 1**)

2	*Tempo*	*dt*	P_0	T_0	*Forma*	*Lunghezza*	*dz*	α	β_2	γ
SMF-28	$20ns$	$0.1ps$	$152mW$	$7.75ps$	sech	$55.5km$	$10m$	$0.18dB/km$	$-21.58ps^2/km$	$0.78W^{-1}km^{-1}$
HNLF	$20ns$	$0.1ps$	$152mW$	$2.09ps$	sech	$12.3km$	$10m$	$0.81dB/km$	$-7.09ps^2/km$	$10.68W^{-1}km^{-1}$

Tabella 3.10: Configurazione per eccitare la propagazione di un solitone nella fibra HNLF (**scenario 2**)

Ci si aspetta che nello scenario 1 la potenza usata sia sufficiente a lanciare un solitone del primo ordine nella fibra SMF-28 ma sia eccedente rispetto a quella sufficiente per la fibra HNLF, proprio a causa della maggior non linearità. Viceversa nella simulazione 2 la potenza ecciterà un solitone del primo ordine in HNLF ma sarà insufficiente per farlo anche nella fibra SMF-28 (in cui dominerà la parte dispersiva). Si eseguono in via preliminare delle simulazioni in assenza di attenuazione visualizzando le intensità, ed ottenendo esattamente quanto previsto (si vedano le figure da 3.25 a 3.28). Inoltre possiamo osservare un comportamento molto interessante per la fibra HNLF quando la potenza è tale per cui $N > 1$.

Scenario 1 ($\alpha = 0$)

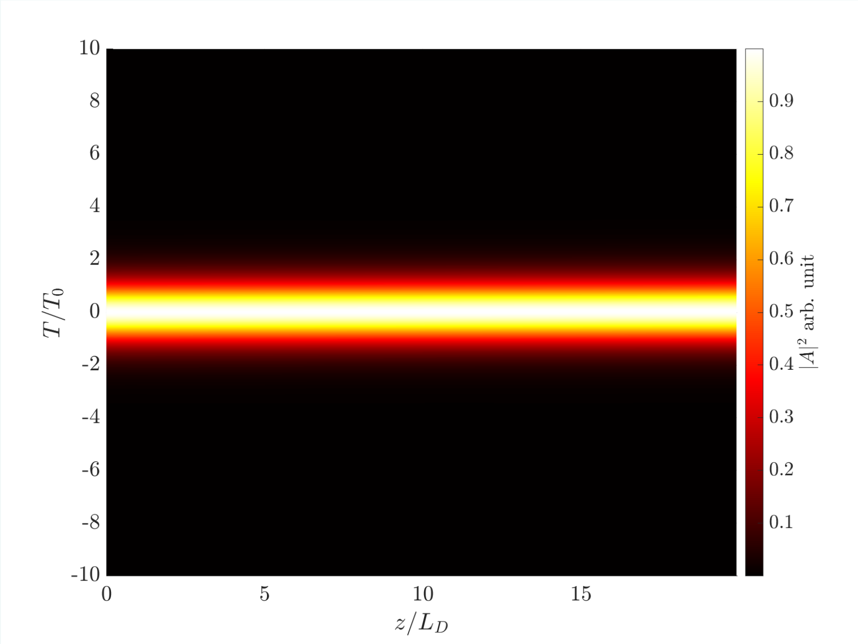

Figura 3.25: SMF-28, $P_0 = 460mW$

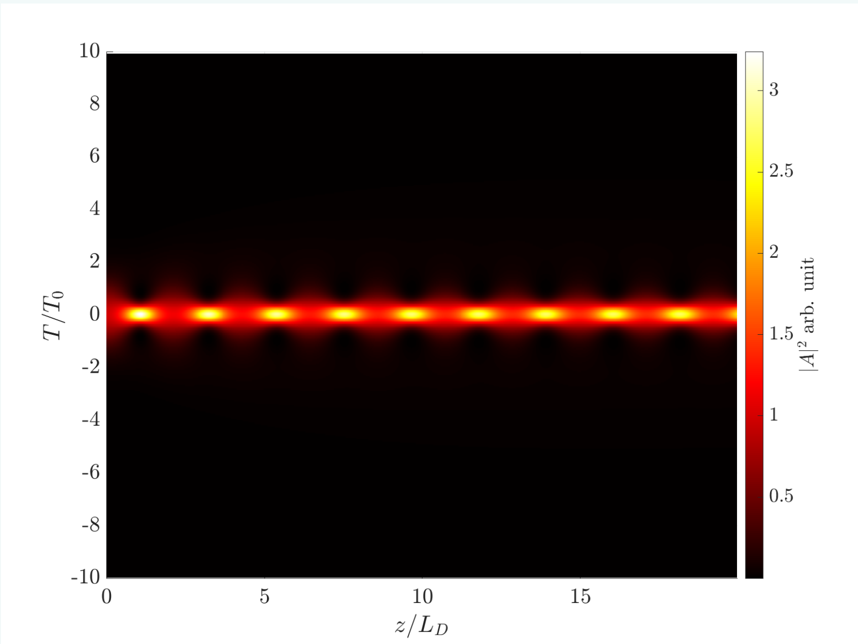

Figura 3.26: HNLF, $P_0 = 460mW$

Scenario 2 ($\alpha = 0$)

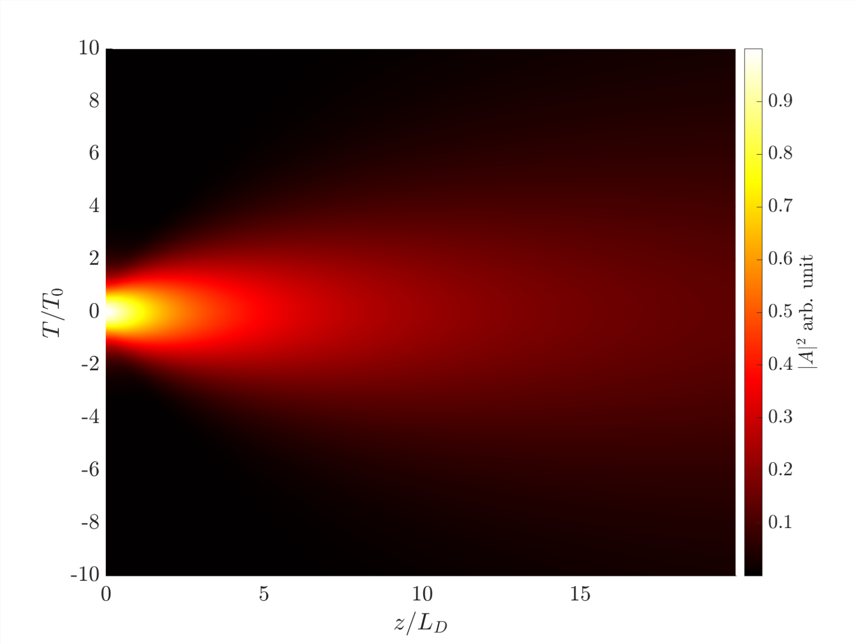

Figura 3.27: SMF-28, $P_0 = 152mW$

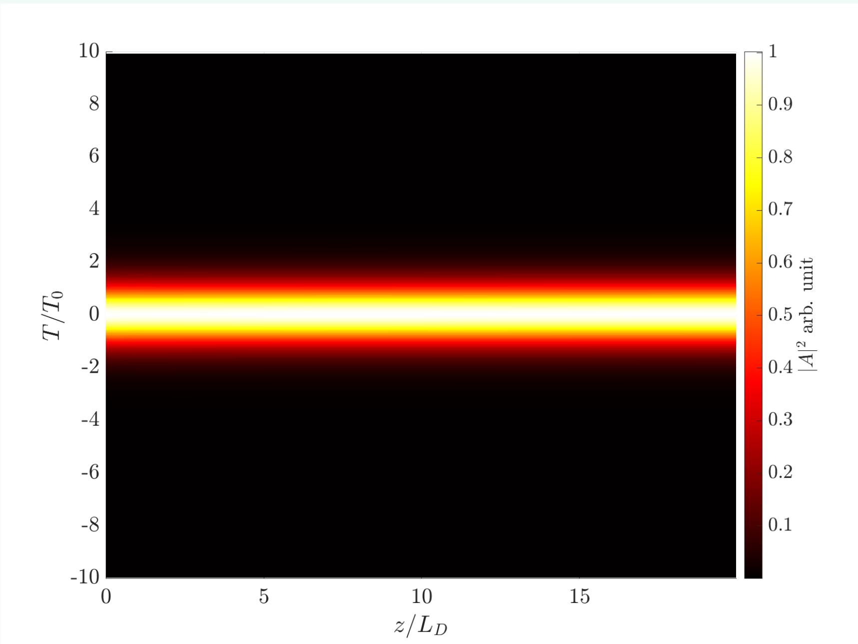

Figura 3.28: HNLF, $P_0 = 152mW$

Si passa ora a considerare le attenuazioni: notiamo che l'attenuazione gioca un ruolo deleterio nei confronti della propagazione a solitoni, ciò non è sorprendente data la dipendenza degli effetti di SPM dall'intensità, che in questi casi continua a calare. Si può quindi affermare che i sistemi descritti da 3.29 e 3.32 sono *limitati dall'attenuazione*.

Scenario 1

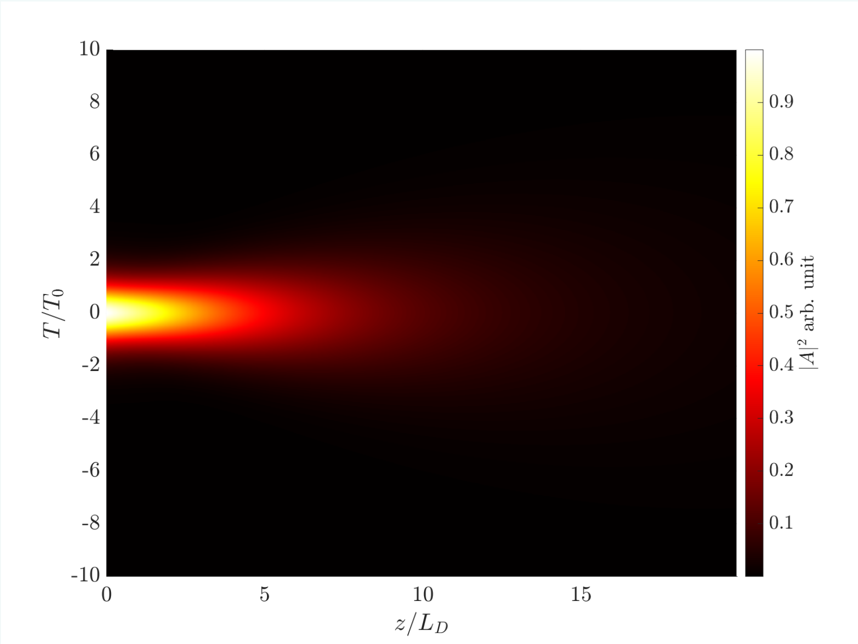

Figura 3.29: SMF-28, $P_0 = 460mW$

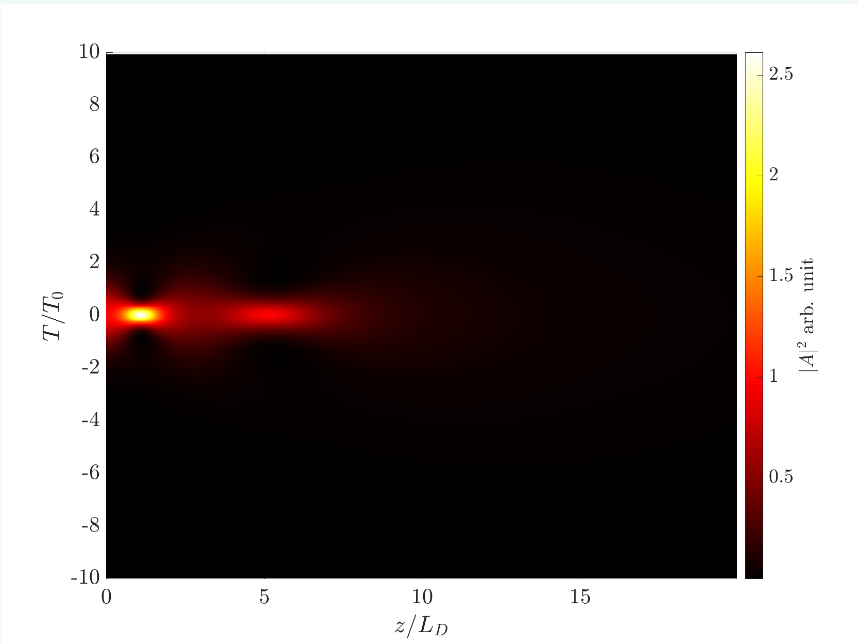

Figura 3.30: HNLF, $P_0 = 460mW$

Scenario 2

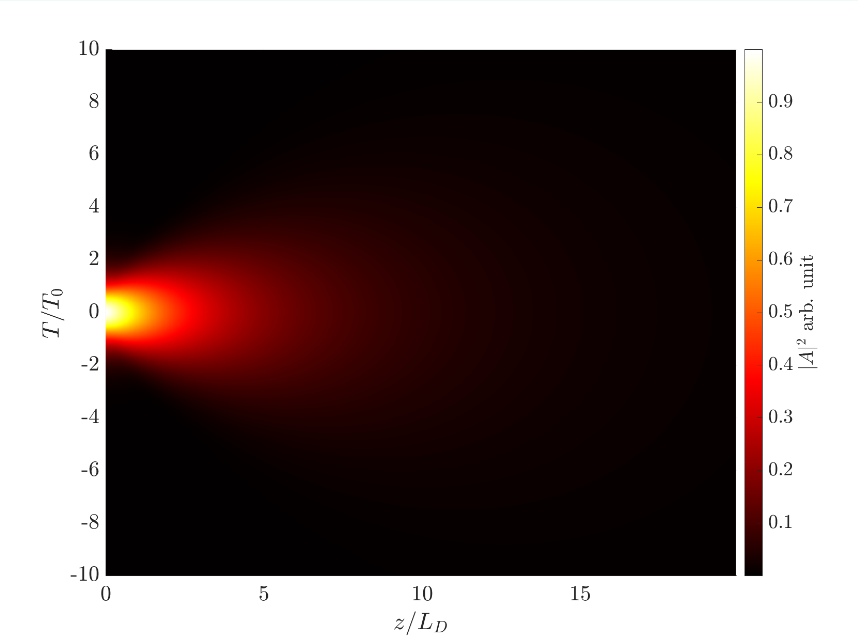

Figura 3.31: SMF-28, $P_0 = 152mW$

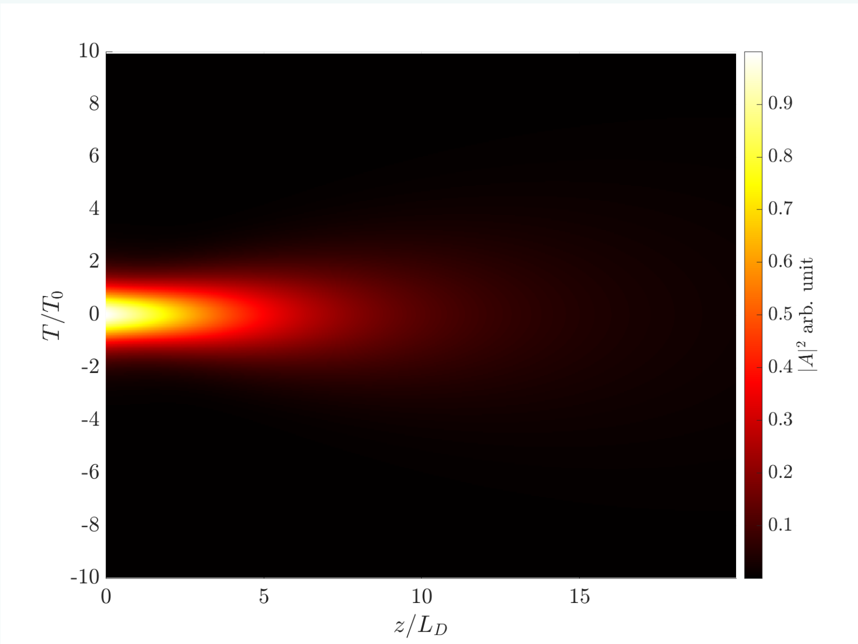

Figura 3.32: HNLF, $P_0 = 152mW$

Infine si svolge un'indagine sulla propagazione a potenze molto superiori a quella richiesta per lanciare un solitone fondamentale. Si usa ad esempio la fibra SMF-28, ma ancora una volta trascurando l'attenuazione per poter visualizzare meglio il fenomeno. L'analisi con il metodo di scattering inverso fornisce anche le caratteristiche dei solitoni di ordine superiore al primo [1, p. 152], per cui stabilendo $N = 3$ si ha un solitone del terzo ordine. È sufficiente moltiplicare per 9 la potenza in gioco nel caso del solitone del primo ordine per poter osservare quest'altra interessante situazione (figura 3.33).

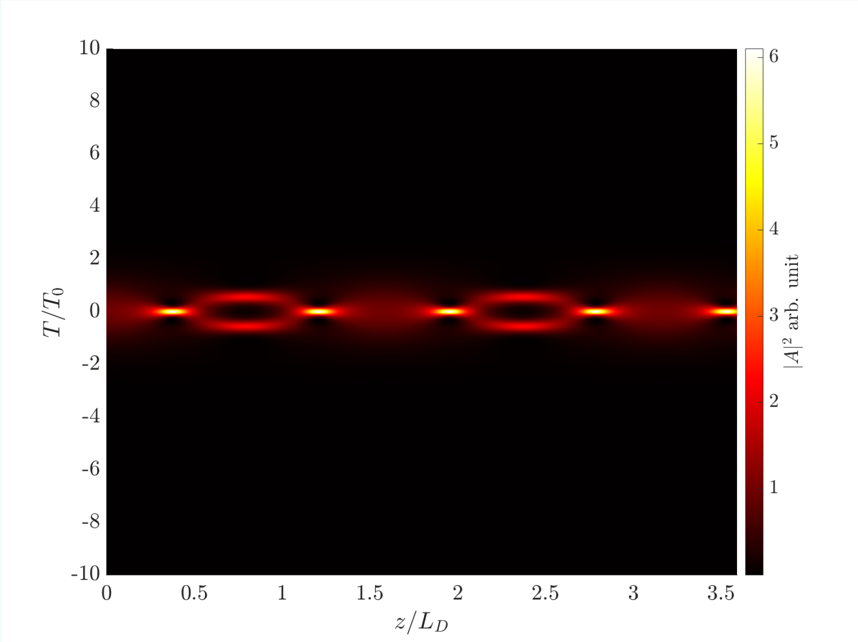

Figura 3.33: SMF-28, $P_0 = 4140mW$

Si può subito osservare una periodicità spaziale: in effetti un solitone del terzo ordine presenta il fenomeno della divisione dell'impulso e della sua successiva ricombinazione (*pulse splitting*, *pulse recovery* in inglese). Dalla descrizione teorica sappiamo che il periodo di ogni solitone di ordine superiore è

$$z_0 = \frac{\pi}{2} L_D$$

che è in accordo con quanto simulato.

Capitolo 4

Conclusioni

Il campo delle fibre ottiche, così importante per le telecomunicazioni di oggi, offre una grande ricchezza di fenomeni fisici che diventano importanti proprio a causa delle lunghezze di propagazione considerate. Sebbene in forma non dettagliata, partendo dai principi fisici (equazioni di Maxwell e modelli della polarizzazione del mezzo) si è ricavata un'equazione di interesse ingegneristico, che descrive la propagazione di impulsi con caratteristiche compatibili con quelli in uso nei sistemi di comunicazione. Il metodo di soluzione numerica implementato ha permesso di osservare i fenomeni dovuti alla Group Velocity Dispersion e Self Phase Modulation, che sono alla base dell'interessante meccanismo di propagazione dei solitoni, che è stato pure osservato nel simulatore.

In questo elaborato ci si è limitati ai casi più semplici, ma comunque significativi, e sono molti i fenomeni che invece sono stati trascurati, come per esempio Stimulated Raman Scattering, Stimulated Brillouin Scattering, Polarization Mode Dispersion, Cross Phase Modulation. Nonostante questo sia un lavoro propedeutico ed introduttivo, rende chiaro il vantaggio di poter usare tecniche di soluzione numerica per l'elettromagnetismo, ed al contempo mostra quanto si possa ricavare con sole tecniche analitiche.

Bibliografia e Sitografia

[1] Govind P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Third edition. Academic Press, 2001.

[2] Jeff Hecht, *City of light - the story of fiber optics*. Oxford University Press, 2004.

[3] Nevio Benvenuto, Michele Zorzi (editori), *Principles of communication networks and systems*. Wiley, 2011.

[4] Lèon Brillouin, *Wave propagation and group velocity*. Academic Press, 1960.

[5] Govind P. Agrawal, *Fiber-Optic communication system*, Third edition. Wiley-interscience 2002.

[6] John D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Seconda edizione italiana (terza edizione americana). Zanichelli, 2001.

[7] Max Born, Emil Wolf, *Principles of Optics*, Sixth edition. Pergamon press, 1980.

[8] Kosaku Yosida, *Operational calculus - a theory of hyperfunctions*, Third edition. Springer, 1984.

[9] Norbert Wiener, *The operational calculus*. Mathematische Annalen, Springer, 1926.

[10] Matteo Frigo, Steven J. Johnson, *The design and implementation of FFTW3*. Proceedings of the IEEE (Volume: 93, Issue: 2, Feb. 2005, pages 216-231).

[11] Carlo Giacomo Someda, *Electromagnetic Waves*. Chapman & Hall, 1998.

[12] David J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, Fourth edition. Cambridge University Press, 2017.

[13] Marco Santagiustina, Carlo Giacomo Someda, *Solitons in Electromagnetism: from the speculations of John Scott Russell to optical soliton commmunications*. IEEE Antenna & Propagation magazine (Volume: 60, Issue: 5, Oct. 2018, pages 154-161).

[14] Domenico Felice, *A Study of a Nonlinear Schrodinger Equation for Optical Fibers*. Tesi di dottorato, Università di Firenze, 2016.

[15] Sugan Shakya, Andis Supe, Ingrida Lavrinovica, Sandis Spolitis, Jurgis Porinis *Different optical fiber nonlinear coefficient experimental measurements*. 6th International Workshop on Fiber Optics in Access Networks (FOAN 2016) in ICUMT 2016.

---

[16] ITU-T *G.652*. `www.itu.int/rec/T-REC-G.652-201611-I/en`

[17] *Cluster di calcolo in dotazione al dipartimento di Ingegneria dell'Informazione* `https://www.dei.unipd.it/bladecluster`

Appendice A

Codice Matlab

A.1 Organizzazione degli script

Come discusso nella parte di simulazione, il metodo SSF usato per ottenere al contempo ampiezza e spettro dell'impulso in modo completo lungo la fibra è oneroso in memoria. Sebbene sia possibile ottenere risultati abbastanza soddisfacenti anche eseguendo lo script con un semplice PC, le simulazioni che hanno generato i grafici presentati hanno impiegato mediamente $\approx 15GiB$ per scenario, e una disponibilità così alta di memoria non è facilmente raggiungibile eseguendo in locale. Perciò gli script sono costruiti in modo da poter essere lanciati sui server di calcolo in dotazione al dipartimento [17].

Per facilitare questa operazione lo script è organizzato in tre parti:

- ITERATE.M contiene nella matrice `plan` gli scenari da simulare nella sessione, una stima dell'onere computazionale in memoria, e le chiamate agli altri due metodi,
- SSFM.M riceve la matrice `plan` da ITERATE.M, ed esegue, iterando sulle righe della matrice, le simulazioni indicate dai parametri specificati. Compie alcuni test per verificare che la simulazione sia fisicamente coerente, e scrive direttamente i grafici nella cartella `./results`,
- IMAGE_PARSER.M accede alla cartella `./results`, e, una volta riaggiustata l'apparenza dei grafici, li salva come file `png` nella cartella `./images`.

Con questo modo di procedere le operazioni di lanciare simulazioni in blocco, oppure di aggiustare i grafici una volta computate le soluzioni, sono agili e veloci, ed è possibile indagare approfonditamente molti aspetti interessanti che il simulatore è in grado di mostrare.

A.2 Codice

L'organizzazione gerarchica del codice facilita la lettura, si noti comunque che, nonostante le dimensioni degli script, il cuore vero e proprio del metodo è rappresentato dalle linee contrassegnate da `"%% Propagation routine"` a riga 51 in SSFM.M, che ammonta a poche righe. Il resto del codice effettivamente permette un utilizzo semplice ed efficace ed una visualizzazione completa del risultato.

ITERATE.M

```
clc;
clear;
close all;
clf;
clearvars all;
set(0,'DefaultFigureVisible','off');

single_plan =   1;
compute =       1;
draft =         0;

%% Simulation parameter definition
if single_plan
    plan = [% T, dt, P0, T0, s, L, dz, a, b2, g
           ];
else
    plan = [% T, dt, P0, T0, s, L, dz, a, b2, g
            % ... batch simulation
            % T, dt, P0, T0, s, L, dz, a, b2, g
           ];
end

%% Memory estimate
for k=1:size(plan, 1)
    time_steps = floor(plan(k, 1)/plan(k, 2));
    space_steps = floor(plan(k, 6)/plan(k, 7));
    mem_estimate = 2 * 8 * 2 * time_steps * space_steps;
    disp("Plot "+ k +" memory consumption: " +
       mem_estimate / (1024^2) + "MiB");
end

%% Simulation routine
if compute
    delete ./results/*.fig;
    ssfm(plan);
end

%% Image generation routine
if ~draft
    delete ./images/*.png;
    image_parser();
end
```

Ssfm.m

```
function ssfm(plan)
    for k=1:size(plan, 1)
      disp("---start plot "+ k +" computation---")
      T         = plan(k, 1);
      dt        = plan(k, 2);
      P0        = plan(k, 3);
      T0        = plan(k, 4);
      sech_flag = plan(k, 5);
      L         = plan(k, 6);
      dz        = plan(k, 7);
      alpha     = plan(k, 8) * 0.23025;
      beta_2    = plan(k, 9);
      gamma     = plan(k, 10);

      analytical_flag = 0;
      savefig_flag = 1;

      width =  800;
      height = 600;

      lim_freq = 10;
      lim_time = 10;
      %%
      time_steps = floor(T/dt);
      space_steps = floor(L/dz);

      LD = T0^2 / abs(beta_2);
      LNL = 1 / (gamma*P0);

      disp_ratio = L / LD;
      nonl_ratio = L / LNL;
      disp("L/LD  = " + disp_ratio);
      disp("L/LNL = " + nonl_ratio);
      disp("N     = " + sqrt(LD / LNL));

      sim_type = 'x';
      if((gamma==0) && (alpha==0) && ~(beta_2==0))
        sim_type = 'd';
      end
      if((beta_2==0) && (alpha==0) && ~(gamma==0))
        sim_type = 'n';
      end

      if (beta_2 == 0)
        LD = 1;
        space_label = "$z \quad [m]$";
      else
```

```
      space_label = "$z/L_D$";
    end

    %% Propagation routine
    time = linspace(-T/2, T/2, time_steps);
    space = linspace(0, L, space_steps);

    w = 2*pi* linspace(-1/(2*dt), 1/(2*dt), time_steps);
    w = fftshift(w);
    A = zeros(time_steps, space_steps);
    A_spect = zeros(time_steps, space_steps);

    if (sech_flag == 1)
      pulse = sqrt(P0) .* sech(time/T0);
    else
      pulse = sqrt(P0) .* exp(-(time/T0).^ 2./2);
    end

    % window function (set to rect)
    win = tukeywin(time_steps, 0);

    A(:, 1) = pulse;
    A_spect(:, 1) = fft(win .* A(:, 1));
    for n = 1:space_steps-1
      A_spect(:, n) = fft(win .* A(:, n));
      A_spect(:, n+1) = A_spect(:, n) .* exp (dz * (1i *
          beta_2/2 * w.^2 - alpha/2)).';
      A(:, n+1) = ifft(A_spect(:, n+1));
      A(:, n+1) = A(:, n+1) .* exp(1i * dz * gamma .* (
         abs(A(:, n+1))).^2);
    end
    A_spect(:, space_steps) = fft(win .* A(:,
       space_steps));

    disp("---end plot "+ k +" computation---")
    %% Sanity check
    if(analytical_flag == 1)
      % GVD only analytical solution
      if(nonl_ratio == 0)
        B = zeros(time_steps, space_steps);
        B(:, 1) = pulse;
        B_spect(:, 1) = fft(win .* B(:, 1));
        flag = 1;

        for n = 1:space_steps-1
          B_spect(:, n) = B_spect(:, 1) .* exp (dz * n *
              1i * beta_2/2 * w.^2).';
          if(any(abs(B_spect(:, n) - A_spect(:, n)) >
             precision))
            flag = 0;
```

```
        end
      end
    end

    % SPM only analytical solution
    if(disp_ratio == 0)
      B = zeros(time_steps, space_steps);
      B(:, 1) = pulse;
      flag = 1;

      for n = 1:space_steps-1
        B(:, n) = B(:, 1) .* exp(1i * dz * n * gamma
            .* (abs(B(:, 1))).^2);
        if(any(abs(B(:, n) - A(:, n)) > precision))
          flag = 0;
        end
      end
    end

    if(flag == 1)
      disp("--> Analytical solution sanity PASS");
    else
      disp("--> Analytical solution sanity FAIL");
    end
  end

  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  %% Plot results
  c_space_samples = 1000;
  l_space_samples = 6;
  c_time_samples = 1000;
  l_time_samples = 2500;

  time_win = floor(time_steps * (lim_time * T0)/T);
  if(time_win >= time_steps/2)
    low_time = 1;
    high_time = time_steps;
  else
    low_time = floor(time_steps/2)-time_win;
    high_time = ceil(time_steps/2)+time_win;
  end

  freq_win = floor(time_steps * (dt*lim_freq)/T0);
  if(freq_win >= time_steps/2)
    low_freq = 1;
    high_freq = time_steps;
  else
    low_freq = floor(time_steps/2)-freq_win;
    high_freq = ceil(time_steps/2)+freq_win;
  end
```

```

    set(groot,'defaulttextinterpreter','latex');
    set(gca, 'defaultTextInterpreter', 'latex')
    set(groot, 'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
    set(gca,'TickLength',[0.1, 0.01])
    set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
    set(groot, 'defaultLegendFontSize', 100);
    set(groot, 'defaultLegendFontWeight','bold');
    color_map = "hot";
    pause(0.5)

    %% decimation for colour plots
    if(floor(space_steps/c_space_samples)>0)
      z_decim = floor(space_steps/c_space_samples);
    else
      z_decim = 1;
    end
    if(floor(2*time_win/c_time_samples)>0)
      t_decim = floor(2*time_win/c_time_samples);
    else
      t_decim = 1;
    end

    if(floor(2*freq_win/c_time_samples)>0)
      f_decim = floor(2*freq_win/c_time_samples);
    else
      f_decim = 1;
    end

    %% Amplitude
    figure('position', [100, 100, width, height]);
    a = surf(space(1:z_decim:space_steps)/LD, time(low_time:t_decim:high_time)/T0, abs(A((low_time:t_decim:high_time), 1:z_decim:space_steps)).^2./P0);
    set(a, 'LineStyle', 'none');
    ax = get(gca,'XAxis');
    ax.FontSize = 20;
    ay = get(gca,'YAxis');
    ay.FontSize = 20;
    xlabel(space_label);
    xlim([0, L/LD]);
    ylabel("$T/T_0$");
    ylim([-lim_time, lim_time]);
    view(2);
    colormap(color_map);
    c = colorbar('FontSize',18, 'TickLabelInterpreter', 'latex');
    c.Label.String = '$|A|^2$   arb. unit';
```

```
        c.Label.FontSize = 18;
        c.Label.Interpreter = 'latex';
        if savefig_flag==1
          savefig("results/"+k+"_amplitude.fig")
        end
        %% Phase
        % phase artifacts deletion
        C = unwrap(angle(A((low_time:t_decim:high_time), 1:
           z_decim:space_steps)), [], 2);
        C(C>9.42) = 9.42;
        C(C<-9.42) = -9.42;
        figure('position', [100, 100, width, height]);
        a = surf(space(1:z_decim:space_steps)/LD, time(
           low_time:t_decim:high_time)/T0, C, 'LineWidth',
           2);
        set(a, 'LineStyle', 'none');
        ax = get(gca,'XAxis');
        ax.FontSize = 20;
        ay = get(gca,'YAxis');
        ay.FontSize = 20;
        xlabel(space_label);
        xlim([0, L/LD]);
        ylabel("$T/T_0$");
        ylim([-lim_time, lim_time]);
        view(2)
        colormap(color_map);
        c = colorbar('FontSize',18,'Ticks',[-3.14,0, 3.14],
           'TickLabels',{'$-\pi$','$0$','$\pi$'}, '
           TickLabelInterpreter', 'latex');
        c.Label.String = 'Phase  [rad]';
        c.Label.FontSize = 18;
        c.Label.Interpreter = 'latex';
        if savefig_flag==1
          savefig("results/"+k+"_phase.fig")
        end
        %% Spectrum
        f = ifftshift(w / 2 / pi);
        A_spect_max = max(A_spect(1, :));
        figure('position', [100, 100, width, height]);
        A_spect = fftshift(A_spect, 1);
        s = surf(space(1:z_decim:space_steps) /LD, f(
           low_freq:f_decim:high_freq)*T0*2*pi, abs(A_spect
           ((low_freq:f_decim:high_freq), 1:z_decim:
           space_steps)./A_spect_max).^2, 'LineWidth', 2);
        set(s, 'LineStyle', 'none');
        ax = get(gca,'XAxis');
        ax.FontSize = 20;
        ay = get(gca,'YAxis');
        ay.FontSize = 20;
        xlabel(space_label);
```

```
        xlim([0, L/LD]);
        ylabel("$\Delta \nu / \nu_0$");
        ylim([-lim_freq, lim_freq]);
        colormap(color_map);
        c = colorbar('FontSize',18, 'TickLabelInterpreter',
           'latex');
        c.Label.String = '$|A|^2$   arb. unit';
        c.Label.FontSize = 18;
        c.Label.Interpreter = 'latex';
        view(2);
        if savefig_flag==1
          savefig("results/"+k+"_spectrum.fig")
        end

        %% decimation for lines plots
        if(floor(space_steps/l_space_samples)>0)
          z_decim = floor(space_steps/l_space_samples);
        else
          z_decim = 1;
        end
        if(floor(2*time_win/l_time_samples)>0)
          t_decim = floor(2*time_win/l_time_samples);
        else
          t_decim = 1;
        end
        if(floor(2*freq_win/l_time_samples)>0)
          f_decim = floor(2*freq_win/l_time_samples);
        else
          f_decim = 1;
        end

        %% Amplitude Lines
        fg=figure('position', [100, 100, width, height]);
        hold all;

        for i = 1:z_decim:space_steps
          z = space(i)*ones(length(low_time:t_decim:
             high_time), 1);
          alf = abs(A((low_time:t_decim:high_time),i));
          plot3(z/LD,time(low_time:t_decim:high_time)/T0,alf
             .^2./P0,'-k', 'LineWidth', 1);
        end
        view(-60, 20);
        ax = get(gca,'XAxis');
        ax.FontSize = 20;
        ay = get(gca,'YAxis');
        ay.FontSize = 20;
        az = get(gca,'ZAxis');
        az.FontSize = 20;
        xlabel(space_label);
```

```
        xlim([0, L/LD]);
        ylabel("$T/T_0$");
        ylim([-lim_time, lim_time]);
        zlabel("$|A|^2$   arb. unit");
        fg.GraphicsSmoothing = 'on';
        pbaspect([2 1 1])
        hold off;
        if savefig_flag==1
          savefig("results/"+k+"_amplitude_lines.fig")
        end

        %% Spectrum Lines
        fg=figure('position', [100, 100, width, height]);
        hold all;
        for i = 1:z_decim:space_steps
          z = space(i)*ones(length(low_freq:f_decim:
             high_freq), 1);
          alf = abs(A_spect((low_freq:f_decim:high_freq),i)/
             A_spect_max);
          plot3(z/LD,f(low_freq:f_decim:high_freq)*T0*2*pi,
             alf.^2,'-k', 'LineWidth', 1);
        end
        view(-60, 20);
        ax = get(gca,'XAxis');
        ax.FontSize = 20;
        ay = get(gca,'YAxis');
        ay.FontSize = 20;
        az = get(gca,'ZAxis');
        az.FontSize = 20;
        xlabel(space_label);
        xlim([0, L/LD]);
        ylabel("$\Delta \nu / \nu_0$");
        ylim([-lim_freq, lim_freq]);
        zlabel("$|A|^2$   arb. unit");
        zlim([0, inf])
        fg.GraphicsSmoothing = 'on';
        pbaspect([2 1 1])
        hold off;
        if savefig_flag==1
          savefig("results/"+k+"_spectrum_lines.fig")
        end

        %% GVD only pulse width
        if (sim_type == 'd')
          [cut, middle] = max(abs(A), [], 1);
          cut = cut*exp(-1/2);
          [v, mins] = min(abs(abs(A(1:middle, :))-cut), [],
             1);
          figure('position', [100, 100, width, height]);
          markers = 1:int32(floor(space_steps/15)):
```

```
            space_steps;
        plot(space(markers)/LD, dt*(middle(markers)-mins(
            markers))/T0, '+', 'MarkerSize', 15);
        hold on;
        plot(space/LD, sqrt(1+(space/LD).^2), 'LineWidth',
             2)
        hold off;
        ax = get(gca,'XAxis');
        ax.FontSize = 20;
        ay = get(gca,'YAxis');
        ay.FontSize = 20;
        xlabel(space_label);
        xlim([0, L/LD]);
        ylabel("$T_1(z) / T_0$");
        l = legend("simulated", "theoretic");
        set(l, 'FontSize', 18);
        if savefig_flag==1
          savefig("results/"+k+"_width.fig")
        end
      end

      %% SPM only spectrum width
      if (sim_type == 'n')
        figure('position', [100, 100, width, height]);
        A_spect_max = max(A_spect(:, space_steps-1));
        s = plot(f(low_freq:f_decim:high_freq)*T0*2*pi,
            abs(A_spect((low_freq:f_decim:high_freq),
            space_steps-1)/A_spect_max).^2, 'LineWidth', 2)
            ;
        hold on;
        s = plot(f(low_freq:f_decim:high_freq)*T0*2*pi,
            ones(length(low_freq:f_decim:high_freq), 1)
            *0.3679, 'LineWidth', 2);
        hold off;
        ax = get(gca,'XAxis');
        ax.FontSize = 20;
        ay = get(gca,'YAxis');
        ay.FontSize = 20;
        xlabel("$\Delta \nu / \nu_0$");
        xlim([-15, 15]);
        ylabel("$|A|^2$   arb. unit");
        l = legend("final spectrum", "$1/e$ level");
        set(l, 'FontSize', 18);
        if savefig_flag==1
          savefig("results/"+k+"_freq_spread.fig")
        end
      end
      %% clear variables
      if ~(size(plan, 1) == 0)
        clearvars -except plan t_start compute draft
```

```
            single sim_type;
         close all;
      end
   end
```

Image_parser.m

```
function image_parser()
    clf;
    clear all;
    close all;
    list = dir(fullfile('./results', '*.fig'));
    set(0,'DefaultFigureVisible','off');

    for k = 1:length(list)
        a = openfig("./results/" + list(k).name);
        pause(1)
        [path, name, extension] = fileparts(list(k).name);
        saveas(a, "images/"+name+".png");
    end
end
```