

PROGETTAZIONE OTTICA DI DUE TELESCOPI RIFLETTORI

Francesco Lorenzi, Maggio 2020

Sommario

In questa relazione mi propongo di progettare due telescopi riflettori, pensati per la stessa applicazione, con l'obiettivo di confrontare i vantaggi e gli svantaggi di ogni schema progettuale. Partendo con il derivare le relazioni richieste dal progetto e applicarle alle specifiche fornite, i telescopi, uno di tipo Cassegrain e uno di tipo Ritchey-Chrétien, verranno poi ottimizzati confrontati con l'aiuto del ray-tracer OSLO.

1 Introduzione e teoria

Entrambi i progetti ottici proposti fanno parte della grande famiglia dei telescopi riflettori a due specchi, che conta tra le sue fila una moltitudine di configurazioni. Ricordiamo che un progetto interamente a specchi, a differenza di uno in cui sono presenti anche lenti, è libero da aberrazione cromatica. Spesso per questo tipo di progetti si usano degli specchi di tipo asferico, con diverse costanti coniche, al fine di minimizzare le aberrazioni geometriche. Le diverse costanti coniche costituiscono infatti uno dei fattori che differenziano i vari telescopi della famiglia.

1.0.1 Costanti coniche

La possibilità di costruire specchi con superfici a paraboloidi, ellissoidi prolati ed oblatti, e iperboloidi, ovvero con diverse costanti coniche, abilita la costruzione di dispositivi *diffraction-limited*, ovvero in cui è possibile ottenere le dimensioni dell'immagine di

un punto (nel nostro caso ben approssimato da una stella per esempio) comparabili con il disco di Airy, per cui quindi gli effetti della diffrazione (non considerati dall'approssimazione geometrica) pongono appunto un limite inferiore alla dimensione dello spot. Data la complessità dei calcoli da eseguire per trovare le aberrazioni in un sistema al variare delle costanti coniche delle componenti, l'ottimizzazione di queste viene affidata ad un ray-tracer, mentre ci occuperemo di stabilire la struttura generale in fase di progetto.

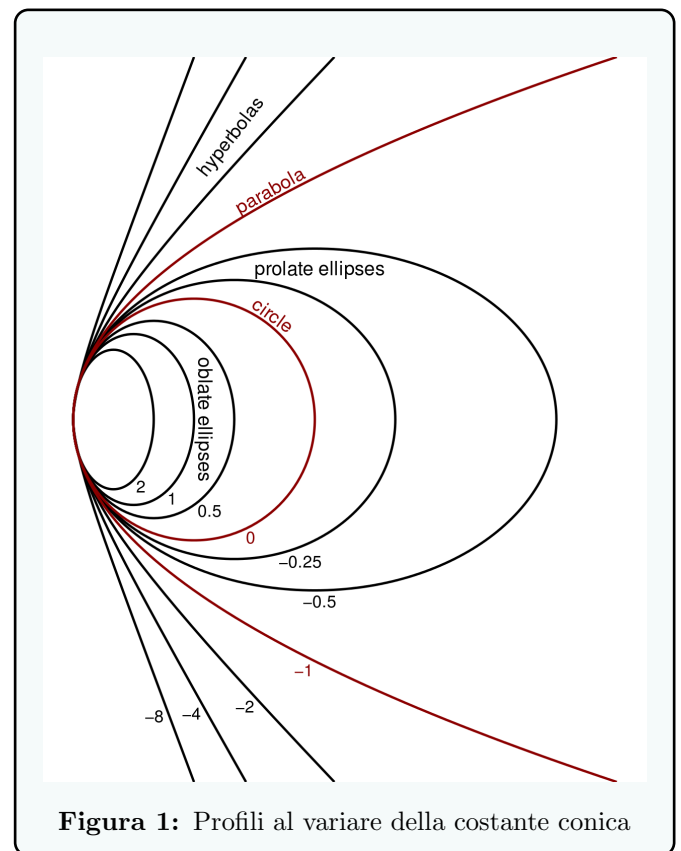


Figura 1: Profili al variare della costante conica

Questi profili rappresentano possibili sezioni di specchio per un dato raggio di curvatura (lo specchio vero

e proprio è costruito, grazie alla simmetria di rotazione, ruotando le curve attorno al loro asse comune), si noti che sono tutte approssimativamente coincidenti per la regione centrale dello specchio, infatti lo sono fino al secondo ordine dell'espansione di Taylor nella distanza dall'asse. Un'importante osservazione è che mentre circonferenza ed parabola (corrispondenti a specchi sferici e parabolici) sono *uniche*, ellissi prolati, oblatti e iperbolici sono rappresentati da una *famiglia* di costanti coniche. In questo modo quando indichiamo, dato un raggio di curvatura, uno specchio come *iperbolico*, non abbiamo in realtà specificato completamente la sua costruzione. Usando specchi iperbolici od ellittici guadagnamo di fatto un grado di libertà nel progetto.

1.1 Il telescopio Cassegrain e la variante Ritchey-Chrétien

Il telescopio Cassegrain consiste in una coppia di specchi disposti come in figura.

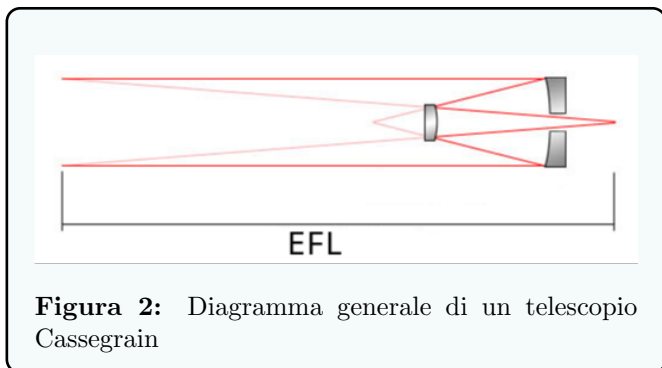


Figura 2: Diagramma generale di un telescopio Cassegrain

Lo specchio di diametro più ampio viene detto primario (quello che raccoglie la luce prima dell'immagine di conseguenza è detto secondario). Nella configurazione Cassegrain originaria lo specchio primario è a sezione parabolica mentre il secondario è iperbolico. Esistono dei telescopi simili al Cassegrain che, per esempio sostituiscono lo specchio secondario con uno specchio sferico, come nel caso della configurazione Dall Kirkham. La variante Ritchey-Chrétien consiste nell'usare per lo specchio primario una sezione iperbolica. Il vantaggio guadagnato da questa nuova specifica sta, come anticipato, nel poter usare

anche la costante conica del primario come grado di libertà per ottimizzare il progetto.

1.2 Obiettivi del progetto

Tenendo a mente il caso di utilizzo tipico dei telescopi, i vincoli di progetto riguardano

- la *dimensione del sensore* (camera CCD o CMOS) e il suo *posizionamento* relativo alla disposizione degli specchi,
- l'angolo del *campo di vista*, ovvero della porzione angolare di cielo che vogliamo osservare con un determinato puntamento,
- la *separazione angolare minima* che vogliamo essere in grado di risolvere, limitata in ultima analisi dalla diffrazione.

Come ogni sistema ottico siamo interessati ad analizzare le principali aberrazioni che affliggono i dispositivi che ci accingiamo a progettare e i metodi per correggerle a nostra disposizione. Dato che stiamo parlando di sistemi particolarmente performanti e l'obiettivo del progetto è arrivare al limite di diffrazione, è necessario fare in modo che tutte le aberrazioni in asse, ma il quanto più possibile anche in tutto il campo di vista, siano così piccole da essere almeno comparabili con il limite di diffrazione.

1.3 Programma operativo

Dato che le specifiche geometriche sono identiche per entrambi i telescopi fino al livello di dettaglio della costante conica, che non è inclusa nei modelli approssimati per la progettazione, *possiamo usare le stesse formule* per delineare la geometria in modo grezzo. La distinzione fra un modello e l'altro avverrà in fase di simulazione, dove procederemo a ottimizzare e operare sulle costanti coniche. Le differenze saranno evidenti solo a quel punto.

2 Progettazione ottica

I vincoli di progetto sono riassunti nella seguente tabella. Tra tutti quelli imposti l'unico di libera scelta è il rapporto di ostruzione ξ , che stabiliremo a 0.3.

a	24mm	dimensione del sensore
$FoV/2$	0.393°	metà campo di vista
ξ	0.3	rapporto di ostruzione
α_R	$2.684 \cdot 10^{-6}$	separazione angolare a $\lambda = 550nm$
x	30mm	distanza rivelatore - specchio

Figura 3: Parametri di progetto

Innanzitutto, date le specifiche del campo di vista (FoV) con la dimensione del sensore a , e dell'angolo minimo di risoluzione α è possibile ricavare la lunghezza focale parassiale (da poi rifinire per ottenere

la EFL) e i diametri degli specchi (D_1 è l'elemento dominante per il comportamento della diffrazione)

$$f_{EQ} = \frac{a}{2 \tan\left(\frac{FoV}{2}\right)},$$

$$D_1 = 1.22 \frac{\lambda}{\alpha_R},$$

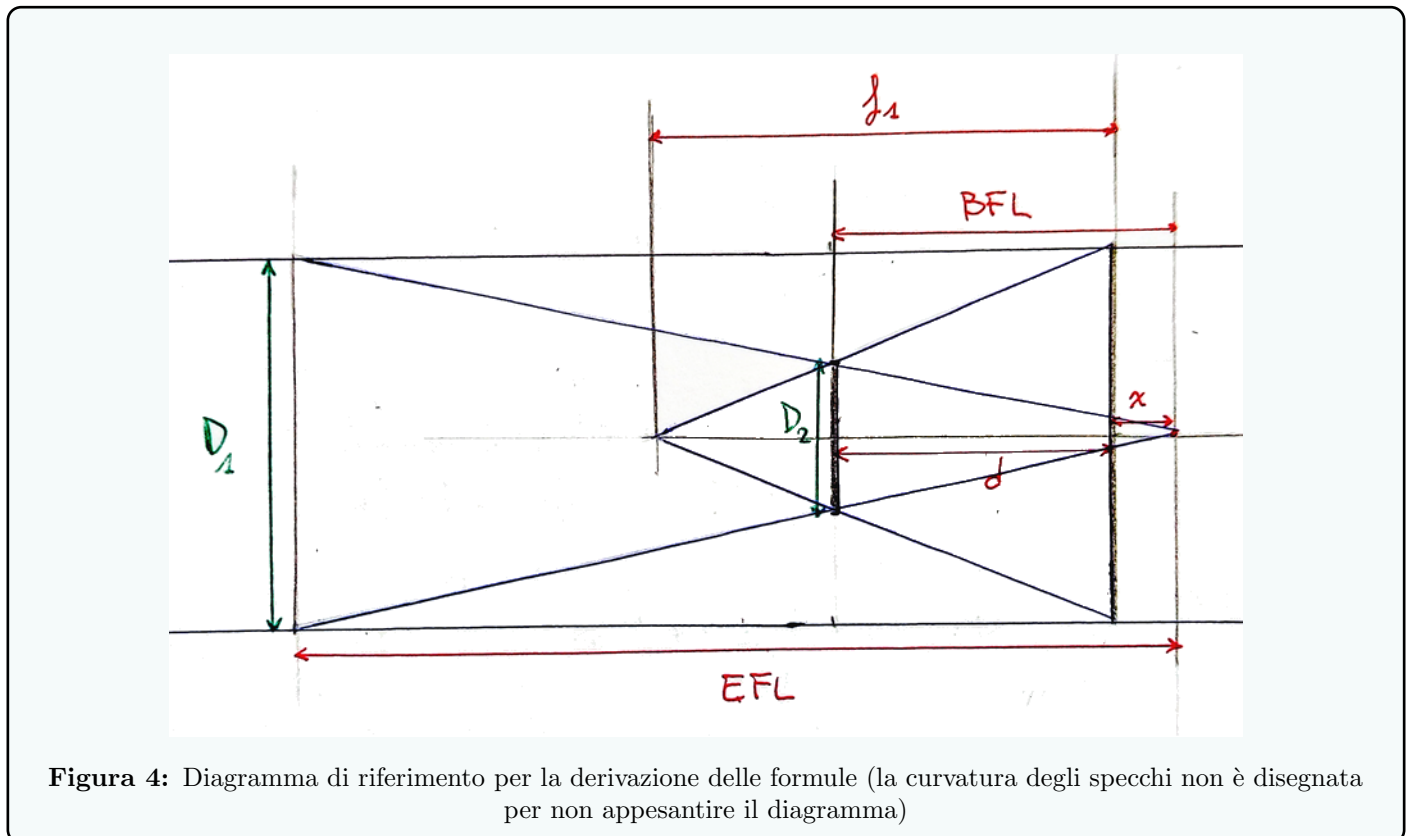
$$D_2 = \xi D_1.$$

2.1 Analisi del sistema ottico

La progettazione ottica di un dispositivo ad elementi riflettenti porta una difficoltà in più rispetto ad usare solo lenti: il fascio cambia direzione di propagazione, e le convenzioni sui segni devono adattarsi in modo che le equazioni stabilite per specchi generali funzionino ugualmente. In questa relazione useremo delle formule appositamente ricavate usando una regola di trasformazione del sistema di riferimento in occasione delle inversioni di cammino del fascio.

La lunghezza focale degli specchi deve essere espressa in modo che resti valida la formula

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} \quad (1)$$



Analizzando la situazione per il primo specchio la configurazione è sufficientemente semplice da non necessitare modifiche alla usuale regola dei segni. Possiamo quindi, osservando la 1, scrivere $f_1 < 0$, $s_{o1} = -\infty$, e deduciamo $s_{i1} = f_1$, come indicato in figura.

La situazione dello specchio 2 invece non è così semplice. Il raggio di curvatura da inserire nel ray-tracer è negativo ma questo non ci deve trarre in inganno: vogliamo rappresentare la focale di questo specchio come positiva! Ulteriore elemento di confusione può essere l'avere un'immagine al di là dello specchio rispetto alla traiettoria del fascio. Per chiarire la situazione allora è utile eseguire un'inversione dell'asse ottico $z' = -z$ in modo da riportarci ad avere un fascio che si propaga nella direzione delle z' positive.

Usiamo come regola generale quella per cui ogni lunghezza nel sistema è una lunghezza orientata rispetto al sistema di riferimento associato allo specchio in cui posa un suo estremo.

Risolviamo l'ambiguità per d , assegnandogli la distanza orientata rispetto allo specchio primario, perciò negativa (utile poiché dovrà interfacciarsi con s_{i1} , anch'esso negativo rispetto allo specchio primario). Definiamo la *back focal length* come la distanza (positiva) tra il secondo specchio ed il piano immagine. Dato che x è un parametro positivo

$$bfl = -d + x \quad (2)$$

Questa coincide con la posizione dell'*immagine* del secondo specchio, ma quest'ultima, essendo costruita su z' , è il suo opposto. Ora possiamo riferire l'immagine del primo specchio al secondo: la posizione orientata in z' dell'oggetto rispetto allo specchio secondario è positiva, e vale

$$s_{o2} = -(s_{i1} - d) = d - f_1 > 0.$$

infatti, in z' , s_{o2} sta al di là dello specchio, ovvero verso le z' positive. Il segno $-$ rappresenta appunto

l'inversione dell'asse. La legge 1 è banalmente valida poiché abbiamo ribaltato l'asse per ricondurci al caso canonico, ma lo è se consideriamo la *vera* lunghezza focale dello specchio secondario, che è positiva. Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} s_{i2} = -bfl &= d - x = \frac{s_{o2}f_2}{s_{o2} - f_2} \\ &= \frac{(d - s_{i1})f_2}{(d - s_{i1}) - f_2} \\ &= \frac{(d - f_1)f_2}{(d - f_1) - f_2} \end{aligned}$$

un'equazione che può essere risolta per f_2 in questa forma

$$f_2 = \frac{bfl(d - f_1)}{bfl - (d - f_1)} \quad (3)$$

Osserviamo un'altra relazione interessante, analizzando la coppia di triangoli simili in figura

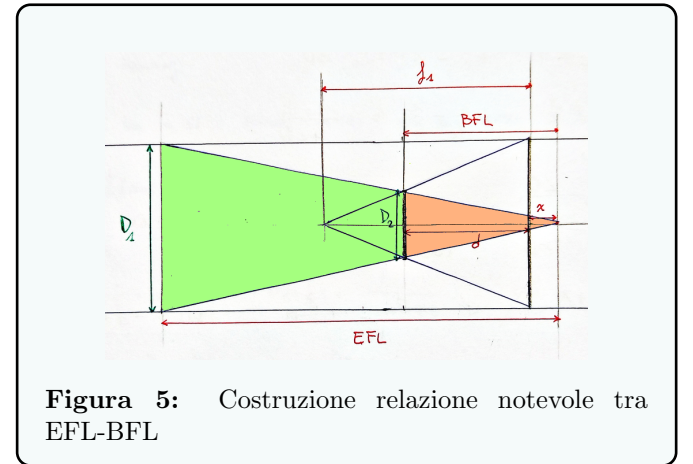


Figura 5: Costruzione relazione notevole tra EFL-BFL

per le leggi di similitudine vale

$$bfl = \frac{D_2}{D_1} f_{EQ} = \xi f_{EQ}. \quad (4)$$

Sfruttando un'altra coppia di triangoli simili ancora,

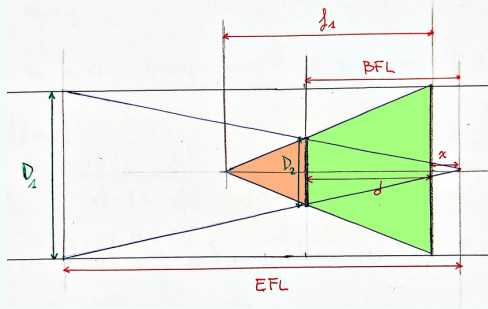


Figura 6: Costruzione relazione notevole per f_1

È facile derivare

$$\frac{f_1}{D_1} = \frac{f_1 - d}{D_2} \quad (\text{si noti } f_1, d < 0) \quad (5)$$

da cui

$$f_1 = \frac{d}{1 - \xi}. \quad (6)$$

2.2 Procedura di calcolo

Riordinando i risultati ottenuti sopra, possiamo partire dalla conoscenza di f_{EQ} , D_1 e D_2 e ottenere le grandezze di interesse in questo ordine:

$$(4) \quad \longrightarrow bfl$$

$$(2), bfl \quad \longrightarrow d$$

$$(6), d \quad \longrightarrow f_1$$

$$(3), d, bfl, f_1 \quad \longrightarrow f_2$$

Infine possiamo calcolare i raggi di curvatura da inserire nel simulatore, ricordandoci dell'inversione dell'asse per il secondo specchio

$$R_1 = 2f_1$$

$$R_2 = -2f_2$$

A questo punto siamo in grado di concludere con i valori calcolati e passare all'analisi al simulatore

f_{EQ}	+1749.4620
f_1	-779.1586
f_2	+449.5446
R_1	-1558.3172
R_2	-899.0892
D_1	250
D_2	80
d	-529.8278
bfl	+559.8278

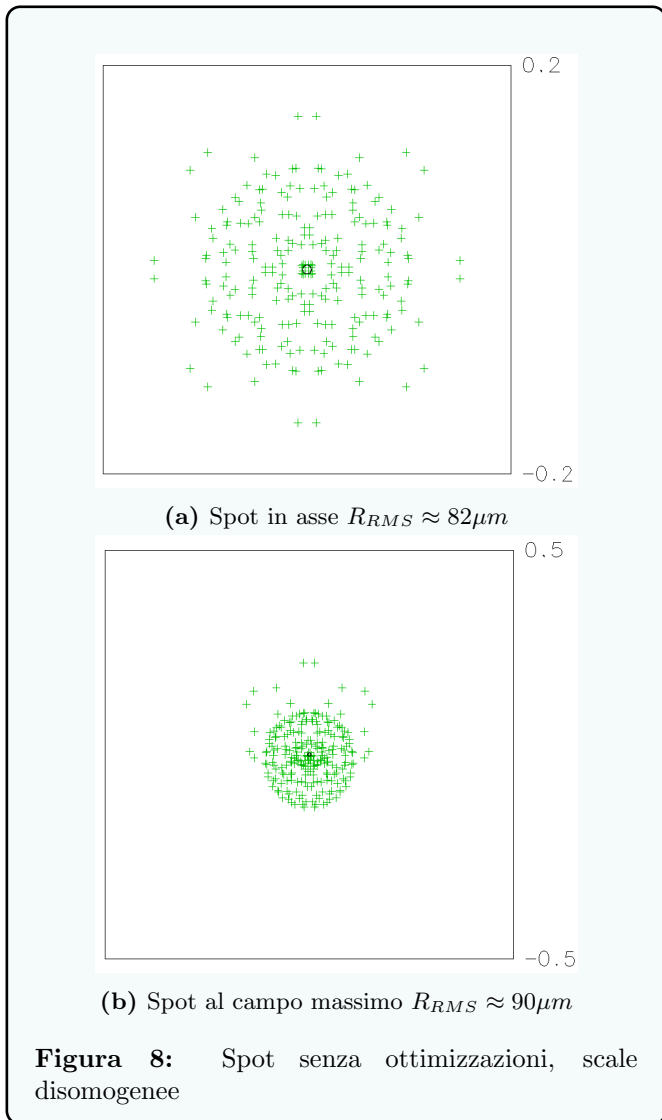
Figura 7: Misure calcolate, in mm

Per una prima simulazione scegliamo per il Cassegrain delle costanti coniche di -1 per il primo specchio (ovviamente), e -2 per il secondo, mentre per il Ritchey-Chrétien entrambi gli specchi saranno a -2 . Questo non è un parametro critico in effetti perché verrà poi aggiustato dall'ottimizzazione.

3 Simulazione

3.1 Cassegrain

Inserendo questi parametri nel simulatore otteniamo un sistema lungi dall'essere accettabile, con uno spot size in asse che, al punto minimo, supera di molte volte il raggio del disco di Airy. Osserviamo preliminarmente un paio di spot: quello in asse ed uno a 0.318° , al massimo angolo del campo di vista. Questo ci aiuterà a visualizzare le carenze di questo primo prototipo.



Ovviamente gli spot saranno disegnati tracciando solo raggi di una lunghezza d'onda, dato che il sistema non ha componenti refrattive, ed è quindi libero da aberrazione cromatica. Notiamo che l'aberrazione in asse, causata principalmente dall'aberrazione sferica, è notevole, e fuori asse sem-

bra esserci una componente di coma predominante sull'astigmatismo.

Infatti, computando le aberrazioni, abbiamo conferma di quanto intuito: i problemi principali al terzo ordine sono la sferica ed il coma

<u>*SEIDEL ABERRATIONS</u>			
SRF	SA3	CMA3	AST3
SUM	0.471062	0.046595	-0.003768

Figura 9: Aberrazioni senza ottimizzazione

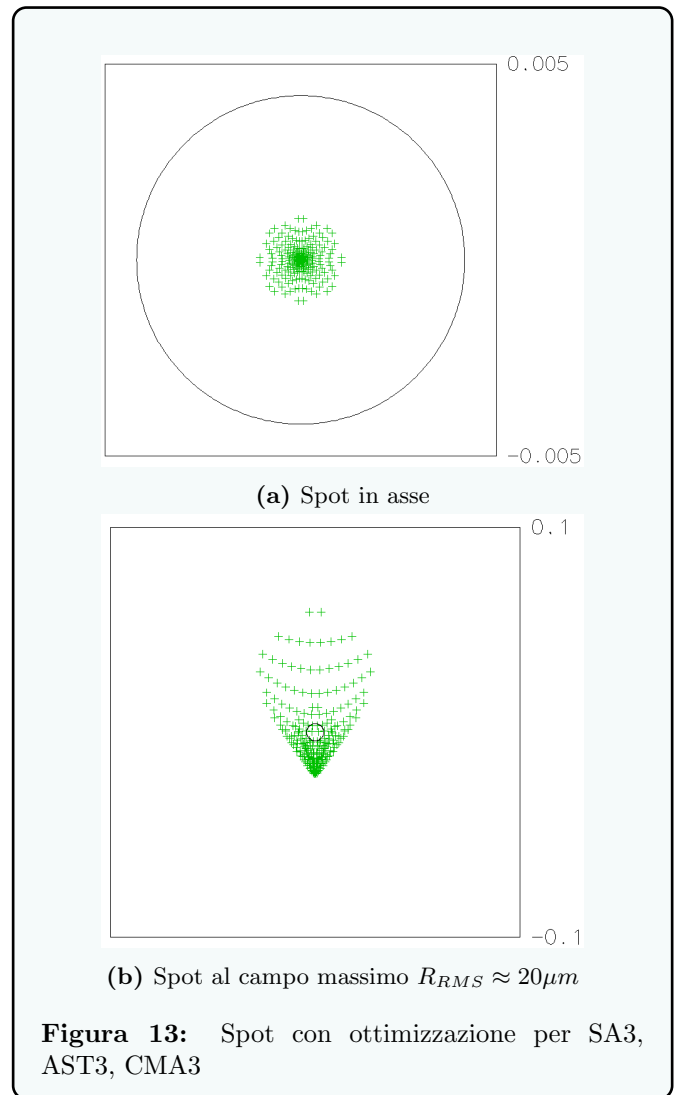
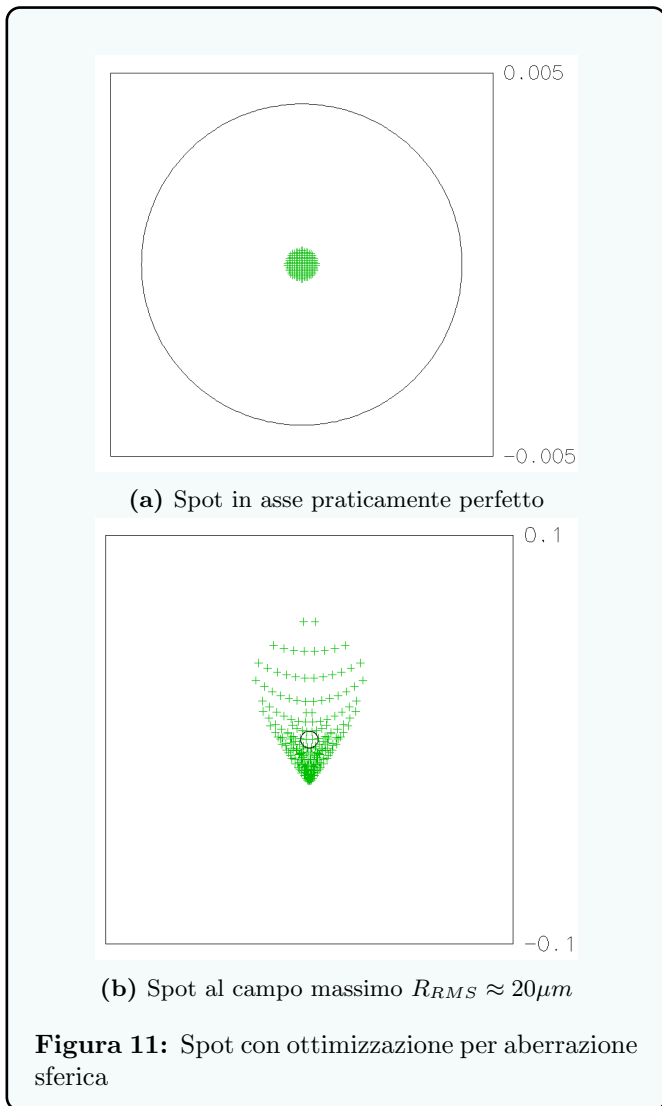
Passiamo quindi ad agire per ridurre questi difetti con un'ottimizzazione. Data l'importanza fondamentale per questo progetto della fase di ottimizzazione, in questa prima parte della simulazione, per il modello Cassegrain, analizzerò il processo passo per passo. La procedura per la variante Ritchey-Chrétien è analoga. Cominciamo con l'ottimizzare per l'aberrazione sferica, che in questo caso è la più rilevante (nonché l'unica che contribuisce allo spot size in asse). Assegnamo libertà di variazione ai due raggi di curvatura, alla distanza tra specchi, ed alla costante conica dello specchio secondario. Il parametro che varia in modo più significativo è la costante conica, che si attesta su -5.5513 .

La correzione dell'aberrazione sferica si dimostra perfetta, mentre restano importanti coma e astigmatismo

<u>*SEIDEL ABERRATIONS</u>			
SRF	SA3	CMA3	AST3
SUM	--	0.017845	-0.005523

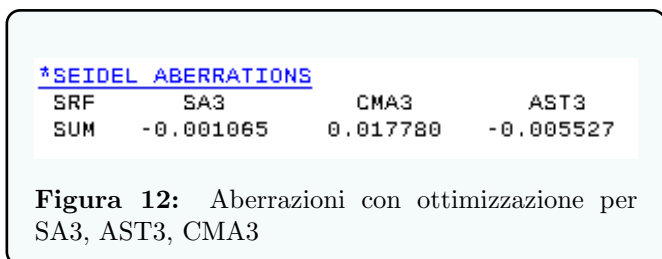
Figura 10: Aberrazioni con ottimizzazione dell'aberrazione sferica

Grazie a questo cambiamento gli stessi spot di prima migliorano tremendamente: gli unici problemi rimasti sono le aberrazioni fuori asse



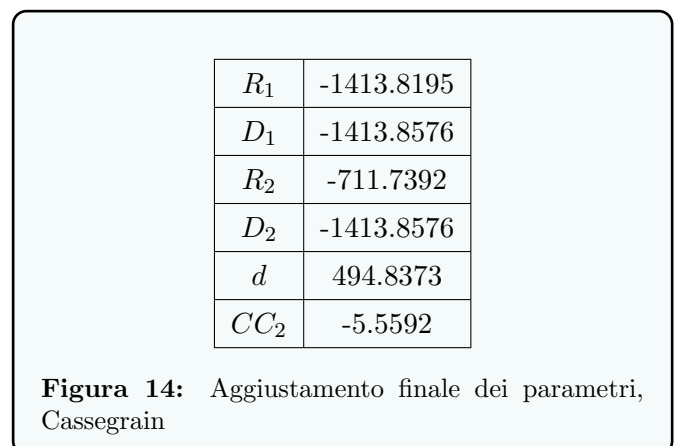
Purtroppo non si riesce a fare altrettanto bene per correggere coma e astigmatismo, per cui gli spot risultano abbastanza aberrati anche dopo l'ottimizzazione. Anzi, dato il compromesso tra le aberrazioni, c'è un leggero peggioramento dell'aberrazione sferica rispetto all'ottimizzazione precedente, mirata solamente a ridurre quest'ultima.

Concludiamo il percorso di ottimizzazione del modello Cassegrain con queste metriche



A con questa coppia di spot, non molto migliori degli ultimi visionati

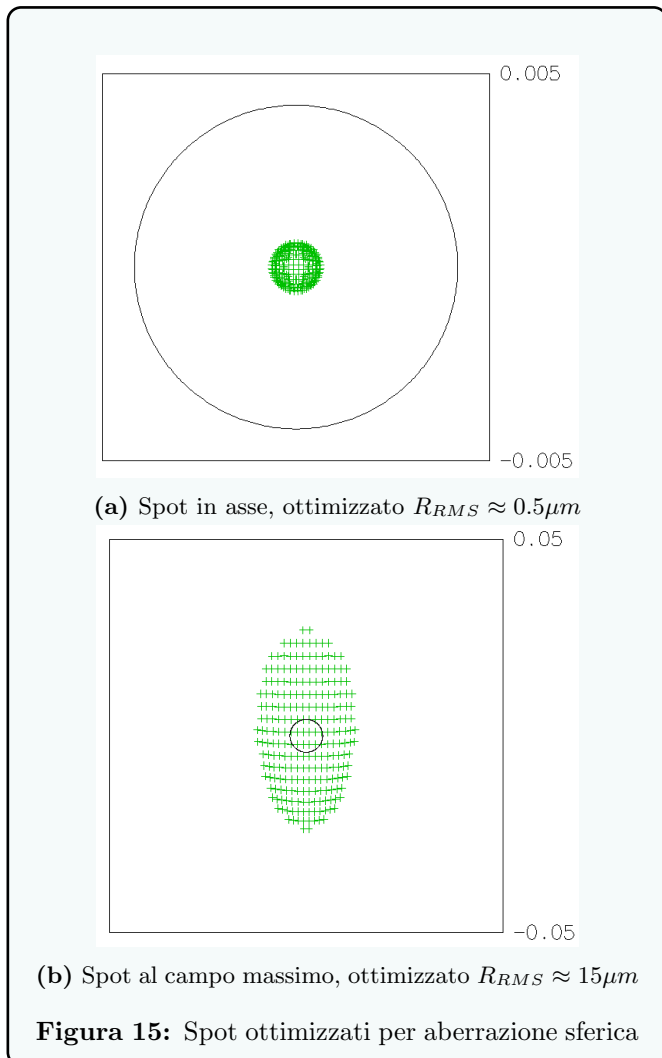
possiamo riassumere quindi le grandezze in gioco nel progetto Cassegrain secondo l'ultima ottimizzazione, in questa tabella



dove CC indica la costante conica dello specchio secondario.

3.2 Ritchey-Chrétien

Seguiamo il medesimo percorso di prima, con l'unica differenza il poter ottimizzare anche la costante conica dello specchio primario. Si ricordi che la chiave per ottenere un abbattimento così considerevole dell'aberrazione sferica nel Cassegrain è stata proprio la variazione della costante conica dello specchio secondario. Ponendo come costanti coniche (arbitrarie) iniziali -2 per entrambi, gli spot saranno molto aberrati, come era lecito aspettarsi. Cerchiamo allora di correggere l'aberrazione sferica, ma stavolta variando entrambe le costanti coniche, otteniamo questo risultato per gli spot analoghi ai precedenti



Infine correggendo anche coma si arriva al risultato notevole descritto da questi parametri di aberrazione

*SEIDEL ABERRATIONS			
SRF	SA3	CMA3	AST3
SUM	1.9024e-07	0.000402	-0.006587

Figura 16: Aberrazioni con ottimizzazione per SA3, AST3, CMA3

possiamo riassumere quindi le grandezze in gioco anche nel progetto Ritchey-Chrétien secondo l'ultima ottimizzazione, in questa tabella

R_1	-1413.8576
D_1	-1413.8576
R_2	-711.7842
D_2	-1413.8576
d	494.8468
CC_1	-1.1368
CC_2	-7.7064

Figura 17: Aggiustamento finale dei parametri, Ritchey-Chrétien

3.3 Analisi delle performance

A questo punto disponiamo di due progetti ottimizzati, e possiamo correttamente confrontarli sulla base di metriche comuni. Procediamo quindi ad un confronto sistematico sui più interessanti test per valutare i vantaggi e gli svantaggi di ciascuno dei due progetti. Osserviamo innanzitutto l'entità e le tipologie di aberrazioni presenti, includendo per completezza anche quelle del quinto ordine

*SEIDEL ABERRATIONS

SRF	SA3	CMA3	AST3	PTZ3	DIS3
SUM	-0.001065	0.017780	-0.005527	-0.005640	0.000364

*FIFTH-ORDER ABERRATIONS

SRF	SA5	CMA5	AST5	PTZ5	DIS5	SA7
SUM	1.5066e-05	6.8283e-05	-5.2105e-07	2.4891e-07	1.1423e-08	-0.001298

(a) Cassegrain

*SEIDEL ABERRATIONS

SRF	SA3	CMA3	AST3	PTZ3	DIS3
SUM	1.9024e-07	0.000402	-0.006587	-0.005640	0.000299

*FIFTH-ORDER ABERRATIONS

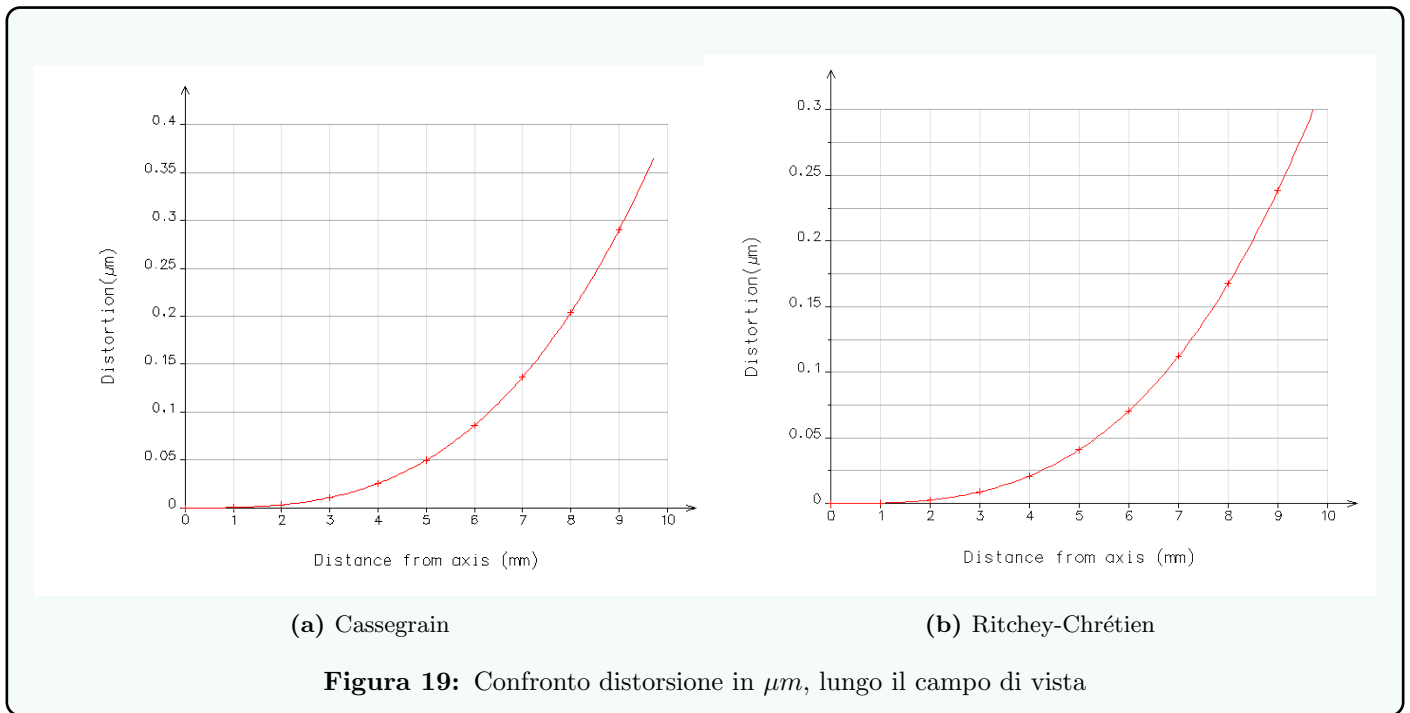
SRF	SA5	CMA5	AST5	PTZ5	DIS5	SA7
SUM	0.000764	0.000374	-4.8080e-07	4.5051e-07	5.2573e-09	-0.002545

(b) Ritchey-Chrétien

Figura 18: Confronto aberrazioni finali

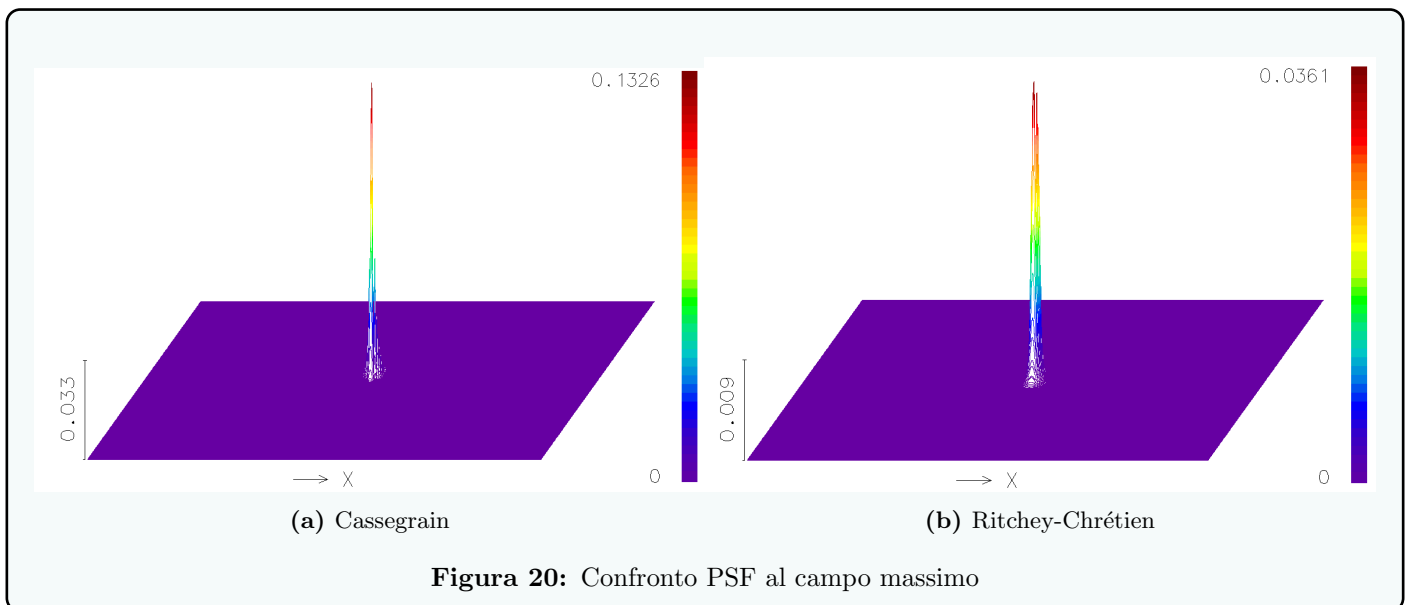
dal confronto emerge che globalmente il progetto Cassegrain risulta più aberrato al terzo ordine (pur superando la performance della controparte nelle aberrazioni del quinto ordine). In particolare l'aberrazione di coma risulta alta, mentre nel Ritchey-Chrétien fuori asse c'è una prevalenza, seppur lieve, di astigmatismo. I progetti si equivalgono invece per aberrazione di Petzval, mentre il Cassegrain è leggermente peggiore per distorsione.

Visualizziamo il contributo della distorsione, particolarmente deleteria per misure astronomiche in cui si valuta tutto il campo di vista



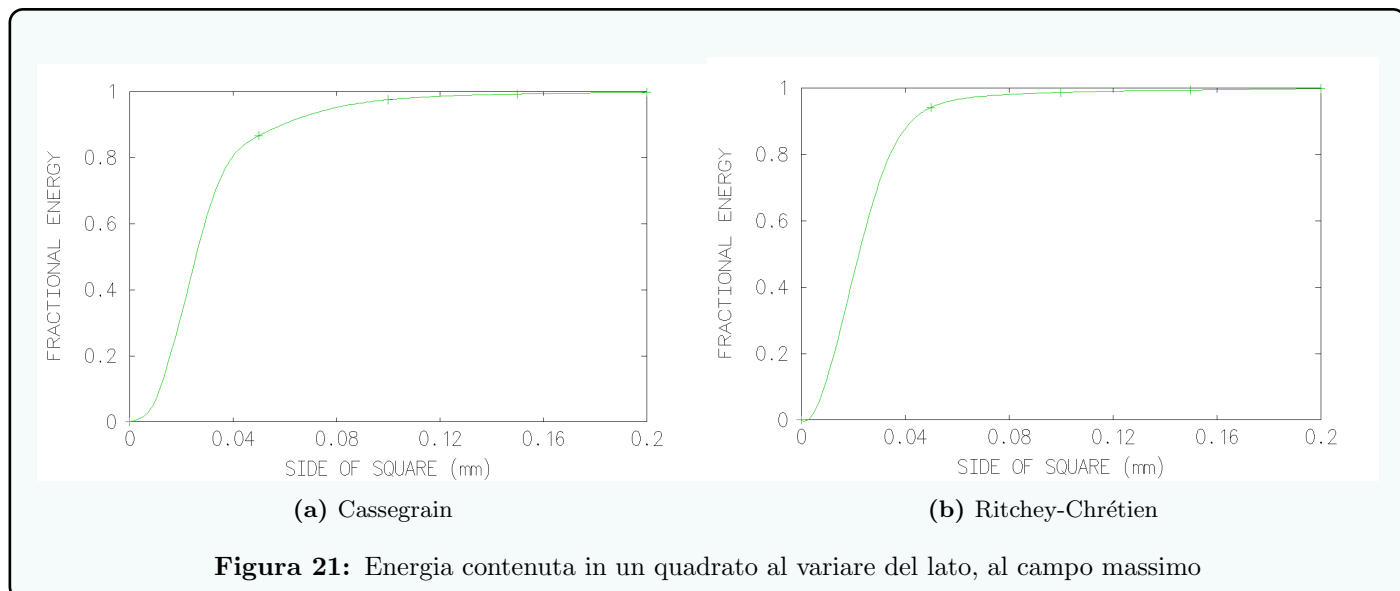
Concludiamo che la differenza tra i due diventa percettibile solamente punti molto fuori asse, e che comunque resta molto ridotta.

Una interessante valutazione è la distribuzione spaziale dell'energia degli spot, in particolar modo di quello al campo massimo, dove i progetti si differenziano maggiormente a causa delle diverse aberrazioni.



Notiamo subito un fenomeno a prima vista controintuitivo: nonostante il Ritchey-Chretien sia globalmente meno aberrato, la predominanza dell'astigmatismo rispetto alla coma fa sì che lo spot, anche se più piccolo in raggio, abbia un picco d'intensità minore rispetto al caso del Cassegrain in cui invece la coma è prevalente, poiché l'astigmatismo distribuisce con più uniformità i raggi. Il valore mostrato come fondoscala nel plot è infatti detto *Strehl ratio*, ed è una misura (puntuale) del rapporto tra intensità massima e intensità ideale in assenza di aberrazioni.

Ai fini della raccolta di fotografie con un sensore CCD o CMOS, è inoltre interessante confrontare la dimensione dello spot, soprattutto in termini di energia, con quella di un pixel del sensore. Normalmente questi hanno dimensioni dell'ordine di grandezza della decina di μm : la percentuale di energia che ricade nel pixel (corrispondente ad un certo spot), nel caso in cui i due centri fossero coincidenti, è rappresentata da questi grafici, che, come sempre, mostrano la situazione più critica, ovvero al campo massimo.



La situazione per i due disegni è simile: ci aspettiamo di avere, per un quadrato di lato $20\mu m$, circa il 50% di energia raccolta. Non è molto ma stiamo comunque parlando della difficile situazione al campo massimo, in asse questa percentuale sale fino quasi al 95%, per entrambi i telescopi.

4 Conclusioni

Entrambi i disegni presentano delle criticità per i punti molto lontani dall'asse, ma in ogni caso i progetti finali hanno degli spot che effettivamente raggiungono il limite di diffrazione per una regione almeno pari al 25% del campo di vista richiesto per il Cassegrain ed almeno fino al 50% per il Ritchey-Chrétien. È possibile esprimere una scelta per uno dei due telescopi una volta stabilita l'aberrazione meno indesiderabile, poiché presentano delle caratteristiche per certi versi complementari: mentre il Cassegrain soffre di aberrazione di coma, il Ritchey-Chrétien risente maggiormente dell'astigmatismo. Il progetto Ritchey-Chrétien risulta globalmente meno aberrato grazie alla possibilità di variare entrambe le costanti coniche degli specchi, possibilità che abbiamo sfruttato in fase di ottimizzazione.

Ancora una volta la disciplina della progettazione ottica si dimostra ricca di possibilità di scelte progettuali: in questo caso, data la capacità di uscire dallo schema dello specchio sferico, siamo stati in grado di progettare un sistema effettivamente diffraction limited, almeno per oggetti sufficientemente vicini all'asse.